Sandrine CARUSO

Boîtes et permutations

Problème 1. *Un tyran retient prisonniers $2n$ mathématiciens. Il leur propose le « jeu » suivant. Il dispose $2n$ boîtes numérotées dans une pièce, et place le nom de chaque mathématicien dans une des boîtes. Il les fait entrer à tour de rôle et leur demande d'ouvrir n boîtes. S'ils trouvent tous leur nom dans une des boîtes qu'ils ont ouvertes, ils sont tous libérés. Si au moins un ne trouve pas son nom, ils sont tous exécutés. Ils ont le droit de se concerter une fois avant de commencer, mais plus ensuite.*

Montrer qu'il existe une stratégie leur laissant plus de 30% de chances de survie.

Stratégie. Lors de leur concertation, les mathématiciens se numérotent de 1 à $2n$. Puis, lorsqu'ils entrent, ils ouvrent en premier la boîte correspondant à leur numéro. Ensuite, ils ouvrent la boîte correspondant au numéro de la personne dont ils ont trouvé le nom, et continuent ainsi de suite.

La décomposition d'une permutation en produit de cycles de support disjoint assure qu'en procédant ainsi, chaque mathématicien, soit finira par tomber sur son nom, soit s'arrêtera à n boîtes. En effet, considérons la permutation σ qui au numéro de la boîte associe le numéro du prisonnier dont le nom est dedans, et sa décomposition en cycles. Avec la stratégie ci-dessus, chaque mathématicien commence à un élément du cycle auquel son numéro appartient, puis décris ce cycle. Ainsi, si le cycle est de longueur k, il devrait trouver son nom dans la k-ième boîte. Et donc selon la règle imposée par le tyran, il trouve son nom si et seulement si $k \leqslant n$.

En tenant compte de tous les prisonniers, on a l'équivalence suivante : les prisonniers sont sauvés si et seulement si la permutation σ a tous ses cycles de longueur inférieure à n.

Problème 2. *Combien y a-t-il de permutations de $\mathfrak{S}_{2n}$ dont tous les cycles sont de longueur inférieure à n ?*

Nous allons en fait dénombrer le nombre de permutations ayant au moins un cycle de longueur strictement supérieure à n. On peut tout de suite remarquer que si un tel cycle existe, il est unique.

Tout d'abord, si k est un entier compris entre $n + 1$ et $2n$, combien y a-t-il de permutations ayant un cycle de longueur k ?

- Il y a $2n$ façons de choisir un premier élément du support du k-cycle. Puis $2n - 1$ d'en choisir un deuxième, etc... Finalement, il y a $(2n)!/(2n - k)!$ façons de choisir le support du k-cycle *dans l'ordre*.
- Cependant, on obtient ainsi plusieurs fois le même cycle. En effet, n'importe quel élément du support peut être choisi comme étant le « premier ». Il y a donc $\frac{(2n)!}{(2n-k)!k}$ manières de choisir le k-cycle.

– Enfin, choisir les $2n-k$ autres éléments revient à choisir une permutation de $\mathfrak{S}_{2n-k}$ et il y a encore $(2n-k)!$ possibilités.

Finalement, il y a $\frac{(2n)!}{k}$ permutations de $\mathfrak{S}_{2n}$ ayant un cycle de longueur k.

Ainsi, le nombre de permutations ayant un cycle de longueur strictement supérieure à n est $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n)!}{k}$. Par conséquent, la probabilité que les mathématiciens soient exécutés est

$$\frac{1}{(2n)!} \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n)!}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Pour en déduire la conclusion du problème 1, il suffit d'établir que cette somme est inférieure à $0{,}7$.

Notons $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$. La suite u_n est croissante. En effet,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \geqslant 0 \end{aligned}$$

En outre, $\sum_{k=1}^{m} = \ln m + \gamma + o(1)$ (où γ est la constante d'Euler), et ainsi,

$$u_n = \ln(2n) - \ln n + o(1) = \ln 2 + o(1)$$

Ainsi, la suite u_n tend vers $\ln 2 \simeq 0{,}69\cdots$, et comme elle est croissante, elle reste toujours inférieure à cette limite, ce qui conclut.