Sandrine CARUSO

Théorème de Brouwer en dimension 2

Références : Rouvière ou Queffélec (Topologie) pour l'implication théorème 2 ⇒ Brouwer

Théorème 1 (Brouwer)**.** *Notons B la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$. Toute application continue de B dans B admet au moins un point fixe.*

La démonstration du théorème de Brouwer utilise le résultat suivant :

Théorème 2. *Il n'existe pas de rétraction de la boule B dans le cercle $\mathbb{S}^1 = \partial B$.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une rétraction $r : B \to \mathbb{S}^1$, c'est-à-dire une application continue $B \to \mathbb{S}^1$ telle que $\forall x \in \mathbb{S}^1$, $r(x) = x$. Si on note i l'inclusion de $\mathbb{S}^1$ dans B,

$$\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \overset{i}{\hookrightarrow} B \xrightarrow{r} \mathbb{S}^1$$

induit des morphismes sur les groupes fondamentaux :

$$(\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1})^* = \mathrm{id}_{\pi_1(\mathbb{S}^1)} : \pi_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{i_*} \pi_1(B) \xrightarrow{r_*} \pi_1(\mathbb{S}^1).$$

Or, $\pi_1(B) \simeq \{1\}$ et $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$. La seule application de $\{1\}$ dans $\mathbb{Z}$ étant le morphisme trivial, l'application $r_* \circ i_*$ ne peut être surjective, donc ne peut être l'identité. $\square$

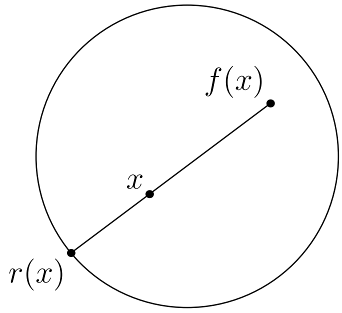
« Autre » démonstration. On note $\Gamma(X)$ l'ensemble des lacets (de base fixée, quelconque) d'un espace topologique connexe par arcs X. Il est muni de la topologie induite par la topologie produit sur $X^{[0,1]}$. On considère, comme à la démonstration précédente,

$$\mathrm{id}_{\mathbb{S}^1} : \mathbb{S}^1 \overset{i}{\hookrightarrow} B \xrightarrow{r} \mathbb{S}^1$$

et on définit $\tilde{\imath} : \Gamma(\mathbb{S}^1) \to \Gamma(B)$, $\gamma \mapsto i \circ \gamma$ et $\tilde{r} : \Gamma(B) \to \Gamma(\mathbb{S}^1)$, $\gamma \mapsto r \circ \gamma$. L'application $\tilde{r}$ est continue : soit Ω un ouvert de ${\mathbb{S}^1}^{[0,1]}$. Il existe $x_1, \ldots, x_n \in [0,1]$ et $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ ouverts de $\mathbb{S}^1$ tels que $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \times \prod_{x \neq x_i} \mathbb{S}^1$. Ainsi $r \circ \gamma \in \Omega$ ssi $\forall i, r \circ \gamma(x_i) \in \Omega_i$ ssi $\forall i, \gamma(x_i) \in r^{-1}(\Omega_i)$. Comme r est continue, $r^{-1}(\Omega_i)$ est ouvert, et $r \circ \gamma \in \Omega$ si et seulement si γ appartient à l'ouvert $r^{-1}(\Omega_1) \times \cdots \times r^{-1}(\Omega_n) \times \prod_{x \neq x_i} B$. Donc $\tilde{r}$ est continue.

En outre, pour tout γ, $\tilde{r} \circ \tilde{\imath}(\gamma) = r \circ i \circ \gamma = \gamma$ (car $r \circ i = \mathrm{id}$), d'où $\tilde{r} \circ \tilde{\imath} = \mathrm{id}_{\Gamma(\mathbb{S}^1)}$. En particulier, $\tilde{r}$ est surjective, c'est-à-dire $\tilde{r}(\Gamma(B)) = \Gamma(\mathbb{S}^1)$. Or, $\Gamma(B)$ est connexe par arcs, alors que $\Gamma(\mathbb{S}^1)$ ne l'est pas. Contradiction : l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs. $\square$

Démonstration du théorème de Brouwer. Soit $f : B \to B$ continue, et supposons que f n'a aucun point fixe. On définit une application $r : B \to \mathbb{S}^1$ de la manière suivante : pour $x \in B$, $r(x)$ est l'intersection de $\mathbb{S}^1$ avec la demi-droite $[f(x), x)$.



Alors $\forall x \in \mathbb{S}^1$, $r(x) = x$. Montrons que r est continue. Pour $x \in B$, notons $\alpha(x)$ le nombre tel que $r(x) - f(x) = \alpha(x)(x - f(x))$; c'est un nombre positif (et même supérieur ou égal à 1). Comme $r(x) \in \mathbb{S}^1$, on a $\|f(x) + \alpha(x)(x - f(x))\|^2 = 1$, c'est-à-dire, en développant la norme (on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire),

$$\alpha(x)^2 \|x - f(x)\|^2 + 2\alpha(x) \langle f(x), x - f(x) \rangle + \|f(x)\| - 1 = 0.$$

Ainsi, $\alpha(x)$ est racine du polynôme $P_x = X^2 \|x - f(x)\|^2 + 2X \langle f(x), x - f(x) \rangle + \|f(x)\| - 1$. Ce polynôme du second degré vérifie $P_x(0) = \|f(x)\| - 1 \leqslant 0$, $P_x(1) = \|x\| - 1 \leqslant 0$, et tend vers l'infini en $\pm\infty$, donc a deux racines distinctes, l'une négative et l'autre plus grande que 1. Le nombre $\alpha(x)$ est égal à cette deuxième racine, soit

$$\alpha(x) = \frac{-\langle f(x), x - f(x) \rangle + \sqrt{\langle f(x), x - f(x) \rangle^2 - (\|f(x)\| - 1)\|x - f(x)\|^2}}{\|x - f(x)\|^2}.$$

Comme f est continue, α est, d'après l'expression ci-dessus, aussi une fonction continue, et $r(x) = f(x) + \alpha(x)(x - f(x))$ également.

Ainsi, r est une rétraction de B sur $\mathbb{S}^1$. Or, d'après le théorème 2, il n'existe pas de telle rétraction. L'hypothèse faite au départ est donc absurde, et f admet un point fixe. $\square$

Compléments. Dans la première démonstration du théorème 2, on a utilisé le théorème suivant :

Théorème 3 (Fonctorialité du π_1)**.** *Soient X et Y un espace topologique, $x_0 \in X$. Toute application continue $f : X \to Y$ induit un morphisme de groupes $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$, avec les propriétés suivantes :*

(i) *si f est l'identité de X, alors f_* est l'identité de $\pi_1(X, x_0)$,*

(ii) *si $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, alors $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

On définit f_* par $f_*([\alpha]) = [f \circ \alpha]$, où α est un lacet de X de base x_0, et où $[\cdot]$ désigne la classe d'homologie. Il faut vérifier que cette application est bien définie, c'est-à-dire que si α et β ont même classe d'homologie, alors $f \circ \alpha$ et $f \circ \beta$ aussi, ce qui n'est pas très difficile. Montrer que c'est un morphisme de groupes se fait également aisément, et les propriétés (i) et (ii) sont immédiates.

Plus généralement, le théorème de Brouwer est vrai dans $\mathbb{R}^n$ pour tout n, car le théorème 2 l'est. Mais pour la démonstration de ce dernier, le groupe fondamental ne suffit plus pour $n \geqslant 3$, car $\mathbb{S}^{n-1}$ est simplement connexe. À la place, on utilise le groupe d'homologie H_{n-1}, pour lequel le théorème 3 est encore valable. En effet, $H_{n-1}(B^n)$ est trivial et $H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ ne l'est pas.