Sandrine CARUSO

Groupe circulaire.

Référence : Audin

Définition. On appelle *groupe circulaire* le groupe des transformations de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ qui préserve l'ensemble des cercles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Dans la définition ci-dessus, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ est identifié à la sphère de Riemann, les cercles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ étant simplement les cercles « naturels » de cette sphère. Si l'on choisit d'identifier plutôt $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (on passe d'une représentation à l'autre par la projection stéréographique), les « cercles » de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont alors les cercles de $\mathbb{C}$ et les droites auxquelles on a ajouté le point à l'infini. Nous pourrons utiliser ces deux représentations de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ dans la démonstration du théorème ci-dessous.

Théorème. *Le groupe circulaire est engendré par les homographies et la conjugaison complexe* $z \mapsto \bar{z}$.

Montrons tout d'abord que le groupe G engendré par les homographies et la conjugaison préserve l'ensemble des cercles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Le groupe des homographies est lui-même engendré par les similitudes et $z \mapsto \frac{1}{z}$. Les similitudes préservent les cercles et les droites de $\mathbb{C}$. L'application $z \mapsto \frac{1}{z}$ préserve les cercles de la sphère de Riemann (*via* la projection stéréographique, il s'agit simplement de la symétrie par rapport au plan équatorial de la sphère). La conjugaison préserve les droites et les cercles de $\mathbb{C}$. Donc G est inclus dans le groupe circulaire.

Établissons maintenant l'autre inclusion. Soit $\phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ une bijection qui préserve l'ensemble des cercles de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Proposition 1. *L'application ϕ préserve les divisions harmoniques.*

On rappelle que quatre points $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont dits en *division harmonique* si leur birapport $[a, b, c, d]$ est égal à -1. Pour établir cette proposition, on commence par montrer le lemme suivant

Lemme 2. *Quatre points $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ sont en division harmonique si et seulement si ils vérifient les conditions géométriques suivantes. Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à abc. Soient $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ deux cercles tangents à $\mathcal{C}$ en respectivement a et b. Ils se coupent en n et m. Le cercle circonscrit à nmc recoupe $\mathcal{C}$ en d.*

Démonstration. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Quitte à leur appliquer une même homographie (une homographie conserve le birapport), on peut supposer que $d = \infty$. Alors la condition géométrique du lemme est celle de la figure suivante.

Dans ce cas, en calculant la puissance de c par rapport à $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$, on obtient $ac^2 = cm \times cn$ et $bc^2 = cm \times cn$, d'où $ac = bc$: c est le milieu de $[ab]$. Un calcul montre que dans cette situation, $[a, b, c, \infty] = -1$.

À l'inverse, si $[a, b, c, \infty] = -1$, on calcule $c = \frac{a+b}{2}$, et on peut se placer dans la condition géométrique de la figure ci-dessus. $\square$

Démonstration. Démonstration de la proposition 1. Soient a, b, c, d en division harmonique. Alors a, b, c, d vérifient la condition géométrique du lemme 2. Or, par hypothèse, ϕ préserve les cercles. Comme ϕ est injective, elle préserve également la tangence (unique point d'intersection...), et finalement elle préserve la condition géométrique du lemme 2. Donc $\phi(a), \phi(b), \phi(c)$ et $\phi(d)$ sont encore en division harmonique. $\square$