Sandrine CARUSO

Décomposition de Dunford

Référence : Oraux X-ENS, Francinou-Ginanella-Nicolas, algèbre 2, p 112

Théorème. *Soit K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie, et u un endomorphisme de E dont le polynôme caractéristique est scindé. Alors il existe un unique couple (d, n) d'endomorphismes de E tels que*

1. $u = d + n$,
2. d *est diagonalisable,*
3. n *est nilpotent,*
4. d *et* n *commutent.*

De plus, d *et* n *sont des polynômes en* u*.*

Existence. Écrivons sous forme factorisée le polynôme caractéristique de u :

$$\chi_u = (X - \lambda_1)^{m_1} \cdots (X - \lambda_r)^{m_r}$$

avec les λ_i deux à deux distincts et $m_i \geqslant 1$. Notons $F_i = \ker(u - \lambda_i)^{m_i}$. D'après le théorème de décomposition des noyaux,

$$\bigoplus_{i=1}^{r} F_i = \ker(\chi_u(u)) = E.$$

D'après le lemme chinois, il existe un polynôme P tel que pour tout i, $P \equiv \lambda_i \pmod{(X-\lambda_i)^{m_i}}$. On définit alors $d = P(u)$. Par construction, d est un polynôme en u. Soit $x \in F_i$. Il existe un polynôme Q tel que $d(x) = P(u)(x) = (\lambda_i + Q \times (X - \lambda_i)^{m_i})(u)(x) = \lambda_i x + Q(u) \circ (u - \lambda_i id)^{m_i}(x) = \lambda_i x$ car $x \in \ker(u - \lambda_i id)^{m_i}$. Ainsi, d est diagonalisable, de valeurs propres les λ_i et de sous-espaces propres les F_i. Posons $n = u - d$; n est bien sûr aussi un polynôme en u, et par conséquent, il commute avec d. Montrons que n est nilpotent. Notons u_i, d_i et n_i les endomorphismes induits par, respectivement, u, d et n sur F_i. On a $n_i = u_i - d_i = u_i - \lambda_i id_{F_i}$, et par définition de F_i, $n_i^{m_i} = 0$. Par conséquent, $n^m = 0$ avec $m = \max m_i$. Donc n est nilpotent.

Unicité. Considérons d et n construits comme précédemment, et soit (d', n') un autre couple d'endomorphismes vérifiant les propriétés *1* à *4* du théorème. L'endomorphisme d' commute avec n', donc avec $u = d' + n'$. Par conséquent, il commute avec tout polynôme en u. Or, on a montré que d était un polynôme en u, donc d' commute avec d. De même, n commute avec n'.

Comme d et d' sont diagonalisables et commutent, ils sont simultanément diagonalisables. En particulier, $d - d'$ est diagonalisable.

Soient p tel que $n^p = 0$ et q tel que $n'^q = 0$. Comme n et n' commutent, la formule du binôme donne

$$(n' - n)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q} \binom{p+q}{k} n'^k n^{p+q-k} (-1)^{p+q-k}.$$

Cette somme est nulle, car soit $k \geqslant q$, et $n'^k = 0$, soit $p + q - k \geqslant p$, et $n^{p+q-k} = 0$. Donc $n' - n$ est nilpotent.

Or, $n' - n = d - d'$. Le seul endomorphisme diagonalisable et nilpotent est 0, donc $n = n'$ et $d = d'$.