Sandrine CARUSO

Résolution en séries entières de $y'' + py' + qy = 0$.

Référence : Zuily-Queffélec

Théorème. *Soit $R > 0$ et soient $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ et $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$ des séries entières de rayon de convergence supérieur ou égal à R. Soit $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$. L'équation $y'' + py' + qy = 0$ admet une unique solution y développable en série entière, de rayon de convergence supérieur ou égal à R, telle que $y(0) = a_0$ et $y'(0) = a_1$.*

Raisonnons par analyse-synthèse, et supposons que nous avons trouvé une telle solution $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Le fait que y vérifie l'équation différentielle s'écrit

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

et par changement d'indice et produit de Cauchy,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} p_k(n-k+1)a_{n-k+1}x^n + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} q_k a_{n-k} x^{n-k} = 0$$

d'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} p_k(n-k+1)a_{n-k+1} + \sum_{k=0}^{n} q_k a_{n-k} = 0.$$

Ainsi, la suite (a_n) vérifie une relation de récurrence, de sorte qu'elle est entièrement déterminée par les valeurs a_0 et a_1. Ceci établit l'unicité d'une éventuelle solution vérifiant les hypothèses du théorème.

Réciproquement, si la suite (a_n) est définie par la relation de récurrence ci-dessus, les calculs ci-dessus montrent que la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ vérifie, sur son domaine de convergence, l'équation différentielle. Il nous reste à établir que le rayon de convergence R' de cette série entière est supérieur ou égal à R. Soit $r \in \,]0, R[$. Nous allons établir que $(a_n r^n)$ est bornée, ce qui assure que $R' \geqslant r$. Comme cette égalité sera vraie pour tout $r \in \,]0, R[$, on aura également $R' \geqslant R$.

Les séries p et q ayant un rayon de convergence supérieur ou égal à r, c'est également le cas de la série entière de terme général $(n+1)(n+2)p_n$ et les suites $((n+1)(n+2)p_n r^n)$ et $(q_n r^n)$ sont bornées. Soit $C > 0$ telle que $(n+2)(n+1)|p_n|r^n \leqslant C$ et $|q_n|r^n \leqslant C$. Pour $M > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, la propriété « $|a_k|r^k \leqslant M$ pour tout $k \in [\![0, n+1]\!]$ »

implique, d'après la relation de récurrence entre les (a_n) et les majorations ci-dessus,

$$\begin{aligned}(n+2)(n+1)|a_{n+1}| &\leqslant \sum_{k=0}^{n}(n-k+1)Mr^{-n+k-1}\frac{Cr^{-k}}{(k+1)(k+2)}+\sum_{k=0}^{n}Mr^{-n+k}Cr^{-k}\\ &\leqslant (n+1)MCr^{-n-1}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)+(n+1)MCr^{-n}\\ &=(n+1)(r^{-1}+1)MCr^{-n}\end{aligned}$$

d'où $|a_{n+1}|r^n \leqslant \frac{C(r^{-1}+1)}{n+2}M$. Il existe n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $\frac{C(r^{-1}+1)}{n+2} \leqslant 1$. Soit alors M tel que $|a_k|r^k \leqslant M$ pour tout $k \in [\![0, n_0+1]\!]$. D'après ce qui précède, par récurrence, cette inégalité est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi, la suite $(a_n r^n)$ est bornée, ce que l'on voulait démontrer.