Sandrine CARUSO

Théorème de Fejér

Référence : Francinou – Gianella – Nicolas, Oraux X-ENS, Analyse 2

Théorème. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, 2π-périodique. On note S_n la somme partielle d'indice n de la série de Fourier de f. Alors la somme de Cesàro de (S_n) converge uniformément vers f.*

On note $f_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k$. On introduit le *noyau de Fejér*

$$K_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)e^{ikx} = \sum_{k=-n+1}^{n-1}\left(1 - \frac{|k|}{n}\right)e^{ikx}.$$

Lemme 1. *On a $f_n(x) = K_n * f$ (produit de convolution défini sur le tore $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$).*

Démonstration. Soit (c_k) la suite des coefficients de Fourier de f. Par définition, on a

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iky}\,dy\,e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)}\,dy. \end{aligned}$$

Donc

$$f_n(x) = \frac{1}{2n\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j} e^{ik(x-y)}\,dy.$$

On a, pour tout x,

$$\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j} e^{ikx} = \frac{1}{n}\sum_{k=-n+1}^{n-1}\sum_{j=|k|}^{n-1} e^{ikx} = \frac{1}{n}\sum_{k=-n+1}^{n-1}(n-|k|)e^{ikx} = K_n(x)$$

d'où $f_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)K_n(x-y)\,dy = K_n * f(x)$. $\square$

Lemme 2. *Pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,*

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}.$$

Démonstration. On a vu, dans la démonstration du lemme 1, que pour tout x, $K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j} e^{ikx}$. Ainsi, pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned}
K_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{j} e^{ikx} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} e^{-ijx}\frac{e^{i(2j+1)x}-1}{e^{ix}-1} \\
&= \frac{1}{n(e^{ix}-1)}\sum_{j=0}^{n-1}(e^{i(j+1)x}-e^{-ijx}) \\
&= \frac{1}{n(e^{ix}-1)}\left(\frac{e^{i(n+1)x}-e^{ix}}{e^{ix}-1} - \frac{e^{-inx}-1}{e^{-ix}-1}\right) \\
&= \frac{1}{n(e^{ix}-1)}\frac{e^{i(n+1)x}-2e^{ix}+e^{-i(n-1)x}}{e^{ix}-1} \\
&= \frac{1}{n}\frac{(e^{i(n+1)\frac{x}{2}}-e^{-i(n-1)\frac{x}{2}})^2}{(e^{ix}-1)^2} = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(\frac{nx}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}
\end{aligned}$$

qui est bien l'égalité annoncée. □

Déduisons maintenant le théorème des deux lemmes ci-dessus. Tout d'abord, d'après le lemme 2, la fonction K_n est toujours positive (si $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $K_n(x) = n \geqslant 0$). De plus, on a

$$\int_0^{2\pi} K_n(x)\,dx = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\int_0^{2\pi} e^{ikx}\,dx = 2\pi$$

car $\int_0^{2\pi} e^{ikx}dx = 2\pi\delta_{0k}$. On écrit, pour tout x,

$$\begin{aligned}
f_n(x) - f(x) = K_n * f(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)K_n(y)\,dy - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)K_n(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(f(y-x)-f(x))K_n(y)\,dy
\end{aligned}$$

et comme K_n est positive, $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(y-x)-f(x)|K_n(y)dy$. Soit $\varepsilon > 0$. La fonction f est continue et périodique, donc uniformément continue. Soit $\eta \in]0,\pi[$ tel que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x-y| \leqslant \eta \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$. On effectue les majorations

$$\int_0^{\eta}|f(y-x)-f(x)|K_n(y)\,dy \leqslant \varepsilon\int_0^{\eta}K_n(y)\,dy \leqslant 2\pi\varepsilon$$

et

$$\int_{2\pi-\eta}^{2\pi}|f(y-x)-f(x)|K_n(y)\,dy \leqslant \varepsilon\int_{2\pi-\eta}^{2\pi}K_n(y)\,dy \leqslant 2\pi\varepsilon.$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\int_{\eta}^{2\pi-\eta} |f(y-x)-f(x)| K_n(y)\,dy &= \int_{\eta}^{2\pi-\eta} |f(y-x)-f(x)| \frac{\sin^2(\frac{ny}{2})}{n\sin^2(\frac{y}{2})}\,dy \\ &\leqslant 4\pi \sup_{[0,2\pi]} |f| \times \frac{1}{n\sin^2(\frac{\eta}{2})},\end{aligned}$$

terme indépendant de x qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. On a majoré, indépendamment de x, $|f_n(x)-f(x)|$ par une quantité que l'on peut rendre arbitrairement petite. On en déduit que (f_n) tend vers f uniformément.