Sandrine CARUSO

Fonction continue dont la série de Fourier diverge.

Référence : Gourdon, Analyse

Théorème. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire et 2π-périodique définie par*

$$\forall x \in [0,\pi], f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sin\Big((2^{k^3}+1)\frac{x}{2}\Big).$$

Alors f est bien définie, continue sur $\mathbb{R}$ et sa série de Fourier diverge en 0.

Pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,\pi]$, on a $|\frac{1}{k^2}\sin((2^{k^3}+1)\frac{x}{2})| \leqslant \frac{1}{k^2}$ qui est le terme d'une série convergente. Ainsi, la série définissant f est normalement convergente, et donc f est bien définie et continue sur $[0,\pi]$, puis sur $[-\pi,\pi]$ par parité, et enfin sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité.

Écrivons la série de Fourier de f sous la forme $\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n(f)\cos(nx) + b_n(f)\sin(nx)$. Comme f est paire, pour tout n, $b_n(f) = 0$. On a (encore par parité de f),

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)\cos(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\sin\left((2^{k^3}+1)\frac{t}{2}\right)\cos(nt)\,dt.$$

En vertu de la majoration effectuée plus haut et du théorème de convergence dominée, on peut intervertir l'intégrale et la somme, de sorte que

$$a_n(f) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}\int_0^\pi \sin\left((2^{k^3}+1)\frac{t}{2}\right)\cos(nt)\,dt.$$

Pour $\alpha, n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_{n,\alpha} = \int_0^\pi \cos(nt)\sin\left((2\alpha+1)\frac{t}{2}\right)\,dt \quad \text{et} \quad s_{n,\alpha} = \sum_{k=0}^{n} a_{k,\alpha}.$$

On peut calculer explicitement les $a_{n,\alpha}$. On a

$$\begin{aligned} a_{n,\alpha} &= \frac{1}{2}\int_0^\pi \sin\big((\alpha+\tfrac{1}{2}+n)t\big) + \sin\big((\alpha+\tfrac{1}{2}-n)t\big) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha+\frac{1}{2}+n} + \frac{1}{\alpha+\frac{1}{2}-n}\right) = \frac{\alpha+\frac{1}{2}}{(\alpha+\frac{1}{2})^2-n^2}. \end{aligned}$$

Montrons que, d'une part, $s_{n,\alpha} \geqslant 0$ pour tous (n,α) et que $s_{n,n} \geqslant \frac{1}{2}\log n$. Si $n \leqslant \alpha$, d'après l'expression calculée ci-dessus de $a_{n,\alpha}$, $a_{k,\alpha} \geqslant 0$ pour tout $k \leqslant n$

et donc $s_{n,\alpha} \geqslant 0$. Pour traiter le cas où $n > \alpha$, remarquons que les $\frac{2}{\pi} a_{n,\alpha}$ sont les coefficients de Fourier de la fonction paire et 2π-périodique g_α définie sur $[0, \pi]$ par $g_\alpha(x) = \sin((\alpha + \frac{1}{2})x)$. Cette fonction est continue et C^1 par morceaux, donc est limite de sa série de Fourier, et en particulier $\frac{a_{0,\alpha}}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_{n,\alpha} = \frac{\pi}{2} g_\alpha(0) = 0$. Donc $(s_{n,\alpha})_n$ tend vers $\frac{a_{0,\alpha}}{2}$ quand n tend vers l'infini ; la suite $(a_{n,\alpha})_n$ étant négative pour $n > \alpha$, la suite $(s_{n,\alpha})_n$ est décroissante à partir de α et donc est positive à partir de ce rang puisqu'elle tend vers une limite positive.

Par ailleurs, $t \mapsto \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{(\alpha + \frac{1}{2})^2 - t^2}$ étant croissante sur $[0, \alpha]$,

$$\begin{aligned} s_{\alpha,\alpha} &= \sum_{n=1}^{\alpha} \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{(\alpha + \frac{1}{2})^2 - n^2} \geqslant \sum_{n=1}^{\alpha} \int_{n-1}^{n} \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{(\alpha + \frac{1}{2})^2 - t^2}\, dt \\ &= \int_0^{\alpha} \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{(\alpha + \frac{1}{2})^2 - t^2}\, dt = \frac{1}{2} \log(4\alpha + 1) \geqslant \frac{1}{2} \log(\alpha). \end{aligned}$$

Rappelons que l'on a calculé $a_n(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k^2} a_{n, 2^{k^3 - 1}}$. On a donc

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k(f) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} s_{n, 2^{k^3-1}}.$$

Les inégalités établies sur les $s_{n,\alpha}$ montrent alors que, pour tout k,

$$S_{2^{k^3-1}} \geqslant \frac{1}{k^2} s_{2^{k^3-1}, 2^{k^3-1}} \geqslant \frac{1}{2k^2} \log(2^{k^3-1}) = \frac{(k^3-1)\log 2}{2k^2}.$$

Ainsi, la suite extraite $(S_{2^{k^3-1}})$ tend vers l'infini, et c'est donc également le cas de la série de Fourier de f en 0.