Sandrine CARUSO

Groupes d'ordre 8.

Référence : Francinou – Gianella, Exercices pour l'agrégation, Algèbre 1

Proposition. *À isomorphisme près, il existe cinq groupes d'ordre* 8 *:* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$, $\mathbb{D}_4$ *et* $\mathbb{H}_8$.

Soit G un groupe d'ordre 8. Tout d'abord, d'après le théorème de structure des groupes abéliens finis, si G est abélien, G est isomorphe à l'un des groupes $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

Dans le cas général, notons r l'ordre maximal des éléments de G. Alors $r \in \{2, 4, 8\}$. Si $r = 8$, G est cyclique et donc $G \simeq \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Si $r = 2$, cela signifie que pour tout $a \in G$, $a^2 = e$. Soient $x, y \in G$. On a $xyx^{-1}y^{-1} = xyxy = (xy)^2 = e$ et ainsi $xy = yx$: G est abélien, et isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.

Intéressons-nous maintenant au cas où $r = 4$. On considère un élément $i \in G$ d'ordre 4, et on pose $H = \langle i \rangle$; H est d'indice 2 dans G donc est distingué. On a une suite exacte

$$1 \longrightarrow H \longrightarrow G \longrightarrow G/H \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow 1.$$

Alors cette suite est scindée si et seulement si il existe $a \in G \backslash H$ d'ordre 2. En effet, si s est une section, $s(1)$ est un tel élément, et si a est un tel élément, s définie par $s(0) = e$ et $s(1) = a$ est une section.

Supposons dans un premier temps que la suite est scindée. Ainsi, G est un produit semi-direct de $H \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. La loi de ce produit est déterminée par un morphisme de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ dans $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Il y a deux tels morphismes : le morphisme nul, qui donne le produit direct $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, et le morphisme identité, qui donne un « vrai » produit semi-direct $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{D}_4$.

Supposons désormais que la suite exacte n'est pas scindée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'élément d'ordre 2 hors de H. L'unique élément d'ordre 2 de G est donc i^2, que l'on note -1. Le neutre est ici noté 1. Soit $j \in G \backslash H$ (j est donc d'ordre 4), et notons $k = ij$. L'élément k n'est pas non plus dans H, et est donc aussi d'ordre 4. On en déduit que $j^2 = k^2 = -1$ puisque k^2 et j^2 sont d'ordre 2. Montrons maintenant que le centre $Z(G)$ de ce groupe est réduit à $\{1, -1\}$. Il est *a priori* d'ordre $1, 2, 4$ ou 8. Mais il ne peut pas être d'ordre 8 puisque G n'est pas commutatif. Il n'est pas non plus d'ordre 1, car G est un 2-groupe et le centre d'un p-groupe n'est jamais réduit à 1. Enfin, si $Z(G)$ était d'indice 2, $G/Z(G)$ serait un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (donc cyclique). Tout élément de G s'écrirait sous la forme $a^p z$ avec a tel que $\bar{a}$ soit générateur de $G/Z(G)$, $p \in \mathbb{Z}$ et $z \in Z(G)$. Donc tous les éléments de G commuteraient les uns avec les autres, et G serait commutatif ce qui n'est pas le cas. Finalement, on en déduit que l'ordre de $Z(G)$ est 2, et donc que $Z(G) = \{1, -1\}$.

En particulier, -1 commute avec i, j et k, et on note $-i = (-1) \times i$, $-j = (-1) \times j$ et $-k = (-1) \times k$. Les éléments 1, -1, i, j, k, $-i$, $-j$, $-k$ sont tous distincts, et vérifient notamment les relations $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$: on reconnaît en G le groupe des quaternions $\mathbb{H}_8$.

Une question : est-il vraiment nécessaire de montrer que $Z(G)$ est exactement $\{-1, 1\}$, ne peut-on pas se contenter de prouver que $-1 \in Z(G)$? (Ce qui est plus facile : il suffit de remarquer que $Z(G) \neq \{1\}$, et alors il a un élément d'ordre 2 (diviseur premier de son cardinal).)