Sandrine CARUSO

Théorème d'inversion locale

Référence : Petit guide de calcul différentiel, Rouvière

Théorème. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenant 0. On note $a = f(0)$, et on suppose que $Df(0)$ est inversible. Alors il existe un voisinage V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ et un voisinage W de a dans $\mathbb{R}^n$ tels que f soit un C^1-difféomorphisme de V sur W.*

La démonstration comprendra deux étapes principales. Dans un premier temps, on établira l'existence locale d'un inverse pour f à l'aide d'une méthode de point fixe, puis on étudiera la régularité de cet inverse.

Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on définit la fonction F_y par, pour $x \in U$,

$$F_y(x) = x - Df(0)^{-1}(f(x) - y).$$

Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Fixons dans un premier temps $y \in \mathbb{R}^n$. La fonction F_y est de classe C^1 sur U, et

$$DF_y(x) = I_n - Df(0)^{-1}Df(x).$$

En particulier, $DF_y(0) = 0$, et par continuité de DF_y, il existe $r > 0$ tel que, si $\|x\| \leqslant r$, alors $\|DF_y(x)\| \leqslant \varepsilon$ (on peut choisir r tel que $\bar{B}(0,r) \subset U$). On en déduit, par le théorème des accroissements finis, que $\|F_y(x) - F_y(0)\| \leqslant \varepsilon \|x\| \leqslant \varepsilon r$. Notons que r est indépendant de y, puisque c'est le cas de DF_y.

On a $F_y(0) = Df(0)^{-1}(y-a)$. Soit $W = \{y \in \mathbb{R}^n, \|Df(0)^{-1}(y-a)\| < (1-\varepsilon)r\}$; c'est un voisinage ouvert de a. Soit $y \in W$. Alors l'inégalité précédente montre que

$$\|F_y(x)\| < \varepsilon r + (1-\varepsilon)r = r.$$

Ainsi, si $x \in \bar{B}(0,r)$, alors $F_y(x) \in \bar{B}(0,r)$, et par conséquent, F se restreint en une application de $\bar{B}(0,r)$ dans elle-même ; la boule $\bar{B}(0,r)$ étant un fermé de $\mathbb{R}^n$, elle est complète.

On a montré de plus que F est ε-lipschitzienne sur $\bar{B}(0,r)$, et comme $\varepsilon < 1$, F est contractante. Par le théorème du point fixe, il existe un unique $x \in \bar{B}(0,r)$ tel que $F(x) = x$, autrement dit, $f(x) = y$. On a même $x \in B(0,r)$, car on peut appliquer ce qui précède à un $r' < r$ tel que $\|Df(0)^{-1}(y-a)\| < (1-\varepsilon)r'$, et obtenir $x \in \bar{B}(0,r') \subset B(0,r)$.

Posons $V = B(0,r) \cap f^{-1}(W)$. Alors ce qui précède montre que f est une bijection de V sur W. En effet, si $x \in V$, $f(x) \in W$ (puisque $x \in f^{-1}(W)$), et pour tout $y \in W$, il existe un unique $x \in B(0,r)$, nécessairement dans V, tel que $f(x) = y$.

Nous avons donc montré l'existence d'un inverse local pour f. Nous allons maintenant nous intéresser à la régularité de cet inverse.

Montrons dans un premier temps que $f^{-1} : W \to V$ est lipschitzienne. Nous allons pour cela réutiliser les applications F_y définies plus haut. Soient $y, y_0 \in W$, et posons $x = f^{-1}(y)$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$. On a alors $F_y(x) = x$ et $F_{y_0}(x_0) = x_0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} x - x_0 &= F_y(x) - F_{y_0}(x_0) \\ &= (F_y(x) - F_y(x_0)) - (F_y(x_0) - F_{y_0}(x_0)) \\ &= (F_y(x) - F_y(x_0)) + Df(0)^{-1}(y - y_0). \end{aligned}$$

Comme F_y est ε-lipschitzienne, on obtient

$$\|x - x_0\| \leqslant \varepsilon \|x - x_0\| + \left\|Df(0)^{-1}\right\| \|y - y_0\|$$

et ainsi,

$$\left\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right\| = \|x - x_0\| \leqslant \frac{\|Df(0)^{-1}\|}{1 - \varepsilon} \|y - y_0\| .$$

Donc f^{-1} est lipschitzienne, et en particulier continue.

Afin d'établir la différentiabilité de f, montrons d'abord que $Df(x)$ est inversible si $\|x\| \leqslant r$. Fixons un tel x et notons, pour simplifier, $A = Df(0)$ et $B = Df(x)$. On a, pour y quelconque,$DF_y(x) = I_n - A^{-1}B$, et rappelons que $\|DF_y(x)\| \leqslant \varepsilon$ pour $\|x\| \leqslant r$. En particulier, $\|I_n - A^{-1}B\| < 1$, et par conséquent, la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} (I_n - A^{-1}B)^k$$

est convergente, et converge vers un inverse de $I_n - (I_n - A^{-1}B) = A^{-1}B$. Donc $A^{-1}B$ est inversible, et donc c'est également le cas de $B = Df(x)$.

Soient $x, x_0 \in V$, $y, y_0 \in W$ tels que $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$. Comme f est différentiable en x_0, on a

$$y - y_0 = Df(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|).$$

Or, on a montré que f^{-1} est lipschitzienne c'est-à-dire que $\|x - x_0\| \leqslant C \|y - y_0\|$ pour une certaine constante C. Donc $o(\|x - x_0\|) = o(\|y - y_0\|)$ et ainsi

$$x - x_0 = Df(x_0)^{-1}(y - y_0) + o(\|y - y_0\|),$$

ce qui signifie que f^{-1} est différentiable en y_0, de différentielle $Df(f^{-1}(y_0))^{-1}$. De plus, $y \mapsto Df(f^{-1}(y))^{-1}$ est continue (composée des applications continues $y \mapsto f^{-1}(y)$, $x \mapsto Df(x)$, et $A \mapsto A^{-1}$). Donc f^{-1} est de classe C^1 sur W.