Sandrine CARUSO

Théorème de la limite simple de Baire

Référence : H. Queffélec, Topologie

Théorème. *Soit X un espace métrique complet. Soit (Y, d) un espace métrique. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de X dans Y qui converge simplement vers une fonction f. Alors l'ensemble $C(f)$ des points de continuité de f est dense dans X.*

Pour $x_0 \in X$, on introduit l'oscillation de f en x_0 :

$$\omega(f, x_0) = \inf_{V \in \mathcal{V}(x_0)} \sup\{d(f(x), f(x')), x, x' \in V\}$$

où $\mathcal{V}(x_0)$ désigne l'ensemble des voisinages de x_0. S'il n'y a pas d'ambiguïté sur la fonction f, on notera simplement $\omega(x_0)$.

Propriétés. *L'oscillation ω vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\omega(x_0) = 0 \iff f$ *est continue en* x_0.
2. *Pour tout* $\varepsilon > 0$*, l'ensemble* $\Omega_\varepsilon = \{x \in X, \omega(x) < \varepsilon\}$ *est ouvert.*
3. $C(f) = \bigcap\limits_{p \in \mathbb{N}} \Omega_{\frac{1}{p}}$.

Démonstration. La propriété 1 est immédiate, et la propriété 3 en est une conséquence directe. Montrons la propriété 2. Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in \Omega_\varepsilon$. Soit η tel que $\omega(x_0) < \eta < \varepsilon$, et soit V un voisinage ouvert de x_0 tel que pour tous $x, x' \in V$, $d(f(x), f(x')) < \eta$. Si $x_1 \in V$, comme V est ouvert, c'est aussi un voisinage de x_1, et l'inégalité précédente montre que $\omega(x_1) \leqslant \eta < \varepsilon$, et ce pour tout $x_1 \in V$. Par conséquent, $V \subset \Omega_\varepsilon$ et Ω_ε est ouvert. $\square$

Fixons $\varepsilon > 0$ et montrons que Ω_ε est non vide (ce qui est loin d'être évident), puis que Ω_ε est dense dans X.

Étape 1 : Ω_ε est non vide. Soit $\varepsilon' > 0$. Soient $x, x_0 \in X$. À l'aide de l'inégalité triangulaire, on a, pour tout n,

$$d(f(x), f(x_0)) \leqslant d(f(x), f_n(x)) + d(f_n(x), f_n(x_0)) + d(f_n(x_0), f(x_0)).$$

Le but est de trouver un x_0, et un voisinage de x_0 tel que, pour tout x dans ce voisinage, chacun de ces trois termes soit majoré par ε' (en choisissant n convenablement). Tout d'abord, quel que soit x_0, il existe un voisinage V_{x_0} de x_0 tel que, si $x \in V_{x_0}$, alors $d(f_n(x), f_n(x_0)) < \varepsilon'$ car f_n est continue. Pour majorer les deux autres termes, nous aimerions utiliser le fait que (f_n) converge simplement vers f ; mais il n'est pas évident que l'on puisse trouver n tel que *pour tout* x dans un voisinage de x_0, $d(f(x), f_n(x))$ soit inférieur à ε'.

Considérons l'ensemble $G_n = \{x \in X, d(f(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon'\}$. Il n'est pas nécessairement fermé (car f n'est pas nécessairement continue), en revanche, l'ensemble

$$F_n = \{x \in X, d(f_m(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon', \forall m \geqslant n\}$$

est, lui, fermé (c'est l'intersection des fermés $\{x \in X, d(f_m(x), f_n(x)) \leqslant \varepsilon'\}$ pour $m \geqslant n$), et on a $F_n \subset G_n$ (car (f_m) converge simplement vers f). De plus,

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$$

car (f_n) est simplement de Cauchy. Or, X étant complet, le théorème de Baire assure alors qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{F_n} \neq \varnothing$. Ainsi, il existe un ouvert $W \subset F_n \subset G_n$. Il suffit alors de choisir $x_0 \in W$, et on aura, pour tout $x \in W \cap V_{x_0} = U$,

$$d(f(x), f(x_0)) < 3\varepsilon'.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que, pour tous $x, x' \in U$, $d(f(x), f(x')) < 6\varepsilon'$, ce qui implique $\omega(x_0) \leqslant 6\varepsilon'$, et donc $x_0 \in \Omega_{7\varepsilon'}$. En posant $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{7}$, on obtient le résultat annoncé.

Étape 2 : Ω_ε est dense dans X. Soit Ω un ouvert non vide de X. Alors Ω vérifie la propriété de Baire. En effet, soit (O_p) une suite d'ouverts de Ω (donc de X) denses dans Ω. Alors $(O_p \cup \overline{\Omega}^c)$ est une suite d'ouverts de X denses dans X, et donc $\bigcap_p (O_p \cup \overline{\Omega}^c)$ est dense dans X. On en déduit que $\bigcap_p O_p$ est dense dans Ω.

Par conséquent, on peut appliquer à Ω et à la suite $(f_{n|\Omega})$, qui converge simplement vers $f_{|\Omega}$, le résultat démontré à l'étape 1 (la propriété de Baire est la seule propriété de X que l'on ait utilisée). Ainsi, il existe $x_0 \in \Omega$ tel que $\omega(f_{|\Omega}, x_0) < \varepsilon$. Comme Ω est ouvert, c'est un voisinage de x_0, et donc l'$\inf$ dans la définition de $\omega(f, x_0)$ peut être restreint aux voisinages contenus dans Ω. Par suite, $\omega(f_{|\Omega}, x_0) = \omega(f, x_0)$ et donc $x_0 \in \Omega_\varepsilon$. On a montré que $\Omega \cap \Omega_\varepsilon$ est non vide, et comme c'est vrai pour tout ouvert non vide Ω, que Ω_ε est dense dans X.

Il reste à conclure en invoquant encore une fois le théorème de Baire : $C(f)$ est une intersection dénombrable d'ouverts denses, donc est dense dans X.