Sandrine CARUSO

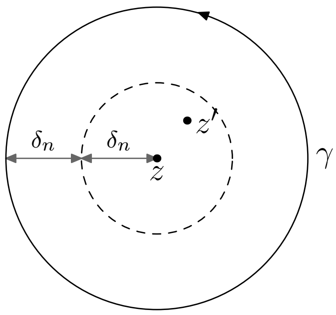
Théorème de Montel.

Référence : Rudin (chercher *familles normales*)

Théorème. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Soit $A \subset H(\Omega)$ une partie uniformément bornée sur tout compact (*ie $\forall K \subset \Omega$ *compact,* $\exists M(K) > 0$ *telle que* $\forall f \in A$, $\forall z \in K$, $|f(z)| \leqslant M(K)$*). Alors toute suite de A admet une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact de Ω.*

Soit (K_n) une suite exhaustive de compacts de Ω, par exemple $K_n = \{z \in D(0,n), d(z, \Omega^c) \geqslant \frac{1}{n}\}$ (de sorte que $\Omega = \cup_n K_n$ et $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$), et soit δ_n tel que $\forall z \in K_n, D(z, 2\delta_n) \subset K_{n+1}$, par exemple $\delta_n = \frac{1}{2n(n+1)}$. On note $A_{|K_n} = \{f_{|K_n}, f \in A\}$. Nous allons montrer que $A_{|K_n}$ est compact, en utilisant le théorème d'Ascoli.

Soient $z, z' \in K_n$, tels que $|z - z'| \leqslant \delta_n$. Soit γ un cercle orienté positivement, centré en z, de rayon $2\delta_n$.



D'après la formule de Cauchy,

$$f(z) - f(z') = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z'}d\zeta = \frac{z - z'}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z')}d\zeta$$

et comme $|\zeta - z| = 2\delta_n$, $|\zeta - z'| \geqslant \delta_n$ et $|f(\zeta)| \leqslant M(K_{n+1})$,

$$|f(z) - f(z')| \leqslant \frac{|z - z'|}{2\pi}\frac{M(K_{n+1})}{2\delta_n^2}4\pi\delta_n = \frac{M(K_{n+1})}{\delta_n}|z - z'|.$$

Ainsi, $A_{|K_n}$ est equilipschitzienne, donc équicontinue. L'hypothèse « A uniformément bornée sur tout compact » implique que pour tout $z \in K_n$, $\{f(z), f \in A_{|K_n}\}$ est une partie borné de $\mathbb{C}$, donc relativement compact. On déduit de ses deux propriétés, d'après le théorème d'Ascoli, que $A_{|K_n}$ est compact pour la norme uniforme. Ainsi, toute suite de $A_{|K_n}$ admet une sous-suite qui converge uniformément. Si $(f_k)_k$ est une suite de A, il existe donc une extractrice φ_n telle que $(f_{\varphi_n(k)})_k$ converge uniformément sur K_n. On fait une extraction diagonale : la suite $(f_{\varphi_n(n)})_n$ converge alors uniformément sur chaque K_n. Comme tout compact K de Ω est inclus dans un des K_n, on en déduit le théorème.