Sandrine CARUSO

Pavages réguliers du plan

Référence : Berger

Définition. Soit E un plan euclidien. Soit G un sous-groupe de $\mathrm{Iso}^+(E)$. On dit que G est un *groupe de pavage* s'il existe un compact connexe d'intérieur non vide P de E tel que

(Axiome 1) $\displaystyle\bigcup_{g\in G} g(P) = E$

(Axiome 2) si $g(\overset{\circ}{P}) \cap h(\overset{\circ}{P}) \neq \varnothing$, alors $g = h$.

Les compacts $g(P)$ sont appelés *pavés*.

Théorème. *À conjugaison près dans le groupe* $\mathrm{GL}(E)$, *il n'existe que 5 tels groupes.*

A. Le groupe G opère discrètement sur E

Le groupe G opère naturellement sur E. Montrons que les orbites sous cette action sont discrètes. Il suffit pour cela de montrer que si $a \in E$, alors a est discret dans son orbite $\mathcal{O}_a$. Tout d'abord, établissons un petit lemme qui sera utile dans la suite.

Lemme 1. *Un compact K de E ne contient qu'un nombre fini de pavés.*

Démonstration. Supposons que ce n'est pas le cas, et soit $\varepsilon > 0$ tel que P contienne une boule B de rayon ε (un tel ε existe car P est d'intérieur non vide). Si K contient une infinité de pavés, on peut trouver une suite de pavés $(g_n(P))$ contenue dans K avec les $g_n(P)$ deux à deux distincts. Soit x_n le centre de $g_n(B)$ (qui est aussi une boule de rayon ε). On a $x_n \in K$. Une suite d'un compact a toujours une valeur d'adhérence, et en particulier, il existe n et m distincts tels que $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$. Donc nécessairement, $g_n(B) = g_m(B)$. D'après l'axiome 2, on a alors $g_n = g_m$, ce qui contredit le fait que les $g_n(P)$ soient distincts. $\square$

D'après le lemme précédent, la boule $B(a, 1)$ n'intersecte qu'un nombre fini de pavés, car les pavés qui l'intersectent sont inclus dans une boule $\bar{B}(a, \delta + 1)$ où δ est le diamètre de P. Montrons que $B(a, 1) \cap \mathcal{O}_a$ n'a qu'un nombre fini d'éléments, ce qui assurera que a est isolé dans $\mathcal{O}_a$. Soit $g(P)$ (avec $g \in G$) un pavé contenant a, et soient $g_1(P), \ldots, g_r(P)$ les pavés qui intersectent $B(a, 1)$ (en nombre fini d'après le lemme précédent). Si $h \in G$ est tel que $h(a) \in B(a, 1)$, alors $hg(P)$ intersecte $B(a, 1)$ en $h(a)$, d'où il suit qu'il existe un indice i tel que $hg(P) = g_i(P)$. D'après l'axiome 2, ceci entraîne $hg = g_i$, et donc $h(a) = g_i g^{-1}(a)$. On en déduit que l'intersection $B(a, 1) \cap \mathcal{O}_a$ est incluse dans $\{g_1 g^{-1}(a), \ldots, g_r g^{-1}(a)\}$ et donc est finie comme annoncé.

B. Étude des translations de G

Notons Γ le sous-groupe des translations de G. Soit R l'ensemble des vecteurs de $\vec{E}$ tel que Γ est l'ensemble des translations de vecteurs parcourant R. Montrons que R est de la forme $\mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$, où $(\vec{u}, \vec{v})$ est une base de $\vec{E}$. Les orbites sous G étant discrètes, en particulier, R est un sous-groupe discret de $\vec{E}$, et donc est de la forme $\{0\}$, $\mathbb{Z}\vec{u}$ ($\vec{u} \neq 0$) ou $\mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ indépendants) : c'est un résultat classique sur les réseaux.

Supposons d'abord que $R = \{0\}$, c'est-à-dire que G ne contient que des rotations. Si r et s sont deux rotations de centres distincts, alors $rsr^{-1}s^{-1}$ est une translation de vecteur non nul. Donc nécessairement, toutes les rotations sont de même centre ω. Mais alors $\cap_{g\in G} g(P)$ est inclus dans un cercle de centre ω, ce qui contredit l'axiome 1.

Supposons maintenant que $R = \mathbb{Z}\vec{u}$. Soit r une rotation de $G\backslash\Gamma$, et $t \in \Gamma$ une translation de vecteur $\vec{w}$. Alors rtr^{-1} est la translation de vecteur $r(\vec{w})$, qui est nécessairement colinéaire à $\vec{u}$ et à $\vec{w}$. On en déduit que r est une rotation d'angle π. Si r et s sont deux rotations de centres respectifs a et b, sr est la translation de vecteur $2\overrightarrow{ab}$ qui est encore colinéaire à $\vec{u}$ et ainsi tous les centres des rotations sont alignés. Donc $\cap_{g\in G} g(P)$ est compris dans une bande autour de l'axe des centres, ce qui contredit encore l'axiome 1.

Donc R est de la forme $\mathbb{Z}\vec{u} + \mathbb{Z}\vec{v}$.

C. Étude des rotations de G

D'après l'axiome 2, les rotations de G sont nécessairement d'ordre fini. Soit α l'ordre maximal d'une rotation de G. Étudions d'abord les cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$.

Si $\alpha = 1$, alors G ne contient que des translations, et d'après le paragraphe précédent, est conjugué au groupe des translations de vecteurs parcourant $\mathbb{Z}^2$ (on fait le changement de base qui envoie $(\vec{u}, \vec{v})$ sur la base canonique). Le pavage obtenu est celui représenté sur la figure 1 (page 4).

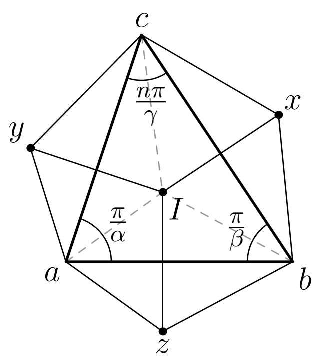
Si $\alpha = 2$, les seules rotations sont des symétries centrales. On fixe a le centre d'une de ces symétries centrales, qu'on note r. Alors pour $b \in E$, b est centre d'une symétrie centrale de G si et seulement si la translation de vecteur $2\overrightarrow{ab}$ est dans G. En effet, si b est centre de $s \in G\backslash\Gamma$, alors sr est la translation de vecteur $2\overrightarrow{ab}$, et réciproquement, si t est la translation de vecteur $2\overrightarrow{ab}$, tr^{-1} est la symétrie de centre b. Ainsi, un tel groupe est conjugué, par exemple, au groupe des translations de vecteurs parcourant $2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et des symétries de centres parcourant $\mathbb{Z} \times \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ (figure 2).

Supposons maintenant que $\alpha \geqslant 3$. Montrons d'abord que les centres des rotations de G forment un ensemble discret. Pour cela, montrons que toute boule ouverte B ne contient qu'un nombre fini de tels centres. D'après ce qui a été dit dans le paragraphe A., il n'y a qu'un nombre fini de pavés intersectant B : notons-les $g_1(P), \ldots, g_r(P)$. Soit g une rotation de G dont le centre a est dans B. Par l'axiome 1, il existe un pavé contenant a, et comme celui-ci intersecte manifestement B (en a), il s'écrit sous la forme $g_i(P)$

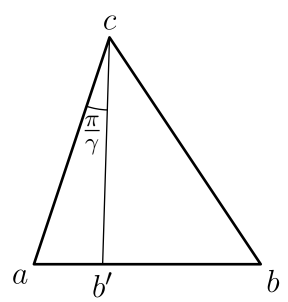
pour un certain i. De même, étant donné que le pavé $gg_i(P)$ intersecte lui aussi B (en $a = g(a)$), il existe un indice j tel que $gg_i(P) = g_j(P)$. Par l'axiome 2, il vient $gg_i = g_j$ et donc $g = g_j g_i^{-1}$. On en déduit que les rotations de G dont le centre appartient à B sont en nombre fini et donc qu'il en est de même de ces centres.

Soit r une rotation d'ordre α et d'angle $\frac{2\pi}{\alpha}$ (on peut toujours en trouver une en utilisant au besoin le théorème de Bézout). Notons a le centre de cette rotation. Comme les centres des rotations forment un ensemble discret, il existe $b \neq a$ le centre d'une rotation d'ordre > 2 (il en existe : la composée de r avec une translation de vecteur non nul en est une) tel que la distance entre a et b soit minimale, et notons s une telle rotation dont l'angle est $\frac{2\pi}{\beta}$. Soit $t = (rs)^{-1}$. Alors t est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{\alpha} - \frac{2\pi}{\beta}$; ce n'est pas une translation car les conditions $\alpha, \beta > 2$ entraînent que cet angle ne peut pas être nul modulo 2π. On notre c le centre de t, γ son ordre et $\frac{2\pi n}{\gamma}$ son angle. Montrons que le choix de b entraîne que $n = 1$.

Tout d'abord, on constate que les angles du triangle abc sont $\frac{\pi}{\alpha}$, $\frac{\pi}{\beta}$ et $\frac{n\pi}{\gamma}$ (cf figure ci-dessous, où I est le centre du cercle inscrit dans abc, et où x, y et z sont les symétriques de I par rapport à $[bc]$, $[ac]$ et $[ab]$ respectivement).



Soit la rotation t' de centre c et d'angle $\frac{2\pi}{\gamma}$ (qui est dans G en utilisant encore une fois le théorème de Bézout). On considère la rotation $s' = (rt')^{-1}$, et on note b' son centre ; s' est, tout comme s, d'ordre β. Si $n > 1$, la situation est donnée sur la figure suivante :



Ainsi, b' est plus proche de b que a, ce qui contredit la définition de b. Donc $n = 1$.

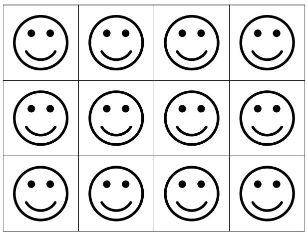


FIG. 1 : $\alpha = 1$

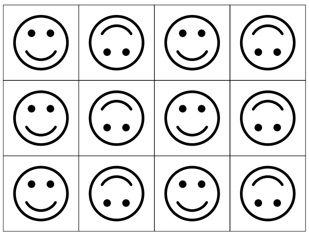


FIG. 2 : $\alpha = 2$

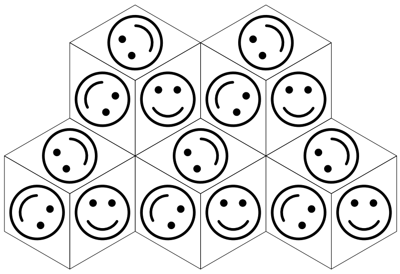


FIG. 3 : $\alpha = 3$

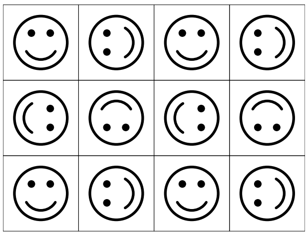


FIG. 4 : $\alpha = 4$

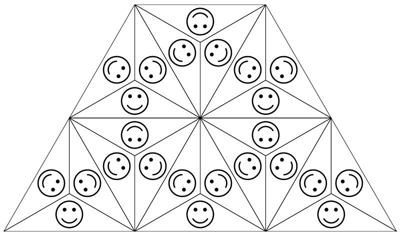


FIG. 5 : $\alpha = 6$

Comme la somme des angles d'un triangle vaut π, on en déduit que $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1$. Cherchons les entiers $\alpha \geqslant 3$, $\beta \geqslant 3$ et $\gamma \geqslant 2$ qui peuvent vérifier une telle égalité, avec α le plus grand des trois. Les possibilités sont les suivantes :

- $\gamma = 2$, $\beta = 3$ et $\alpha = 6$ (figure 5),
- $\gamma = 2$, $\beta = 4$ et $\alpha = 4$ (figure 4),
- $\gamma = 3$, $\beta = 3$ et $\alpha = 3$ (figure 3).

Les 5 cas rencontrés ci-dessus fournissent bien au moins 5 classes de conjugaisons dans $\mathrm{GL}(E)$ distinctes car deux groupes conjugués ont des rotations de même ordre. Il reste à s'assurer que si deux groupes sont dans le même cas, ils sont conjugués. Ceci a déjà été fait dans le cas $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$. Dans les trois autres cas, on remarque que les groupes correspondant à chaque cas sont même conjugués dans le groupe des similitudes. En effet, ils sont entièrement déterminés par la forme du triangle abc construit ci-dessus (un triangle équilatéral pour le cas $\alpha = 3$, un triangle isocèle rectangle pour le cas $\alpha = 4$, et un demi-triangle équilatéral pour le cas $\alpha = 6$).