Sandrine CARUSO

Réduction des endomorphismes autoadjoints.

Référence : Gourdon

Théorème. *Soit E un espace euclidien (resp. hermitien) et $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Alors f est diagonalisable dans une base orthonormée, et ses valeurs propres sont réelles.*

Lemme. *Soit E euclidien ou hermitien, $f \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. Si F sev de E est stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.*

Démonstration. Soit $x \in F^\perp$. Alors $\forall y \in F$, $\langle x|y\rangle = 0$. Soit $y \in F$. Comme F est stable par f, $f(y) \in F$ donc $\langle x|f(y)\rangle = 0$. Or, f est autoadjoint donc $\langle f(x)|y\rangle = 0$. Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on a bien $f(x) \in F^\perp$. $\square$

Démontrons maintenant le théorème. On raisonne par récurrence sur la dimension n de E. Si $n = 1$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\forall x \in E$, $f(x) = \lambda x$. Le fait que f soit autoadjoint s'écrit $\forall x, y \in E, x\bar{\lambda}\bar{y} = \lambda y\bar{x}$, en particulier pour $x = y = 1$, $\lambda = \bar{\lambda}$ et λ est réel.

Supposons que $n \geqslant 2$, et que le résultat vrai pour tout espace de dimension $n-1$. Notons Φ la forme quadratique (resp. hermitienne) définie par $\Phi(x) = \langle x|f(x)\rangle$. Puisque E est de dimension finie, Φ est continue et la sphère unité S est compacte. Il existe donc $x_0 \in S$ tel que $\Phi(x_0) = \max_{x\in S} \Phi(x)$. On note λ ce $\max$, qui est un réel. Soit Φ_1 la forme quadratique définie par $\Phi_1(x) = \lambda\|x\|^2 - \Phi(x)$. Par construction, Φ_1 est une forme positive, et $\Phi(x_0) = 0$. Ainsi, Φ_1 n'est pas définie positive. Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, une forme positive non définie positive est dégénée : si on note φ_1 la forme polaire associée à Φ_1, pour tout $y \in E$, $|\varphi_1(x_0, y)|^2 \leqslant \Phi_1(x_0)\Phi_1(y) = 0$ donc $\varphi_1(x_0, y) = 0 = \varphi_1(y, x_0)$. Or, on a $\varphi_1(y, x) = \langle y|\lambda x - f(x)\rangle$. Ainsi, $\lambda x_0 - f(x_0)$ est orthogonal à tout élément de E, donc est nul. On en déduit que λ est valeur propre de f associée à x_0.

Soit $F = x_0^\perp$. C'est un sous-espace euclidien (resp. hermitien) de E de dimension $n-1$. Comme x_0 est vecteur propre de f, $< x_0 >$ est stable par f et d'après le lemme, F est stable par f. L'endomorphisme $f_{|F}$ induit par f sur F est encore autoadjoint, et par hypothèse de récurrence, il est diagonalisable dans une base orthonormée $(x_1, \dots, x_{n-1})$ de F, et ses valeurs propres sont réelles. Or, par construction, $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ est une base othonormée de E et f est diagonalisable à valeurs propres réelles dans cette base.

Application (Pseudo-réduction simultanée)**.** *Soient S_1 et S_2 deux matrices symétriques réelles (resp. hermitiennes) de taille n, S_1 étant définie positive. Alors il existe $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ et D diagonale réelle telles que*

$$ {}^tPS_1P = I_n \quad \textit{et} \quad {}^tPS_2P = D. $$

Démonstration. La matrice S_1 étant définie positive, la forme quadratique canoniquement associée sur K^n est un produit scalaire (resp. hermitien), que l'on note $\langle\cdot|\cdot\rangle$. On note Φ la forme quadratique associée à S_2 ; elle est de la forme $\Phi(x) = \langle x|f(x)\rangle$ où f est un endomorphisme autoadjoint. Il existe donc une base $\mathcal{B}$ orthonormée pour $\langle\cdot|\cdot\rangle$ dans laquelle la matrice D de f, qui est aussi celle de Φ, est diagonale réelle. Il suffit alors de prendre pour P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à la base canonique. $\square$