Sandrine CARUSO

# Groupe simple d'ordre 60.

Référence : RMS 3/4 novembre/décembre 1999

**Proposition.** *Tout groupe simple d'ordre* $60$ *est isomorphe à* $\mathfrak{A}_5$.

Soient $G$ un groupe simple d'ordre $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ et $n_5$ le nombre de $5$-Sylow de $G$. D'après les théorèmes de Sylow, $n_5 \equiv 1 \pmod 5$ et $n_5|12$. Par conséquent, $n_5 = 1$ ou $6$. Mais $n_5$ ne peut être égal à $1$, car le $5$-Sylow serait alors distingué, or $G$ est simple par hypothèse. Donc $n_5 = 6$.

Le groupe $G$ agit transitivement par conjugaison sur l'ensemble des $5$-Sylow, d'où l'existence d'un morphisme $G \mapsto \mathfrak{S}_6$, non trivial puisque l'action est transitive. De plus, le noyau de ce morphisme étant un sous-groupe distingué de $G$, il est nécessairement réduit au neutre. Ainsi, le morphisme est injectif et $G$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_6$.

Considérons maintenant le groupe dérivé $D(G)$ de $G$. Il est lui aussi distingué dans $G$ ; mais il n'est pas nul car $G$ n'est pas commutatif. Il est donc égal à $G$. Par conséquent,

$$G = D(G) \subset D(\mathfrak{S}_6) = \mathfrak{A}_6.$$

Montrons que $G$ n'est pas distingué dans $\mathfrak{A}_6$. On pourrait invoquer le fait que $\mathfrak{A}_6$ est simple, mais on peut aussi se passer facilement de ce résultat : soit $a \in G$ d'ordre $5$. Si $b \in \mathfrak{A}_6$ est également d'ordre $5$, alors $\langle a \rangle$ et $\langle b \rangle$ sont tous deux des $5$-Sylow de $\mathfrak{A}_6$, donc sont conjugués. Si $G$ était distingué, il contiendrait alors tous les éléments d'ordre $5$ de $\mathfrak{A}_6$, mais ce n'est pas possible car il y a $\binom{6}{5} \cdot 4! = 144$ tels éléments.

Considérons maintenant l'ensemble $X = \mathfrak{A}_6/G$ des classes à gauche de $G$ dans $\mathfrak{A}_6$. Il est de cardinal $\frac{360}{60} = 6$. Le groupe $G$ agit sur $X$ par translations à gauche, *via* le morphisme

$$\begin{array}{rcccl} \phi & : & G & \to & \mathfrak{S}_X \simeq \mathfrak{S}_6 \\ & & g & \mapsto & (xG \mapsto (gx)G) \end{array}$$

Le fait que $G$ ne soit pas distingué dans $\mathfrak{A}_6$ entraîne que ce morphisme est non trivial. En effet,

$$\begin{array}{rcl} \phi(G) = \{id\} & \Leftrightarrow & \forall g \in G, \forall x \in \mathfrak{A}_6, gxG = xG \\ & \Leftrightarrow & \forall g \in G, \forall x \in \mathfrak{A}_6, \forall h \in G, gxh \in xG \\ & \Leftrightarrow & \forall g \in G, \forall x \in \mathfrak{A}_6, gx \in xG \\ & \Leftrightarrow & \forall g \in G, \forall x \in \mathfrak{A}_6, g \in xGx^{-1} \\ & \Leftrightarrow & \forall x \in \mathfrak{A}_6, G = xGx^{-1}. \end{array}$$

On déduit alors comme précédemment de la simplicité de $G$, l'injectivité de $\phi$. Par conséquent, $G \simeq \phi(G)$. Or, pour tout $g \in G$, $\phi(g)(G) = G$, autrement dit, $G$ est fixe par tous les éléments de $\phi(G)$. Donc $\phi(G)$ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_5$.

On conclut en remarquant, comme précédemment, que $G \subset D(\mathfrak{S}_5) = \mathfrak{A}_5$, puis par égalité des cardinaux (ou encore, par le fait que $G$ est d'indice $2$ dans $\mathfrak{S}_5$, et que $\mathfrak{A}_5$ est le seul sous-groupe d'indice $2$ de $\mathfrak{S}_5$).