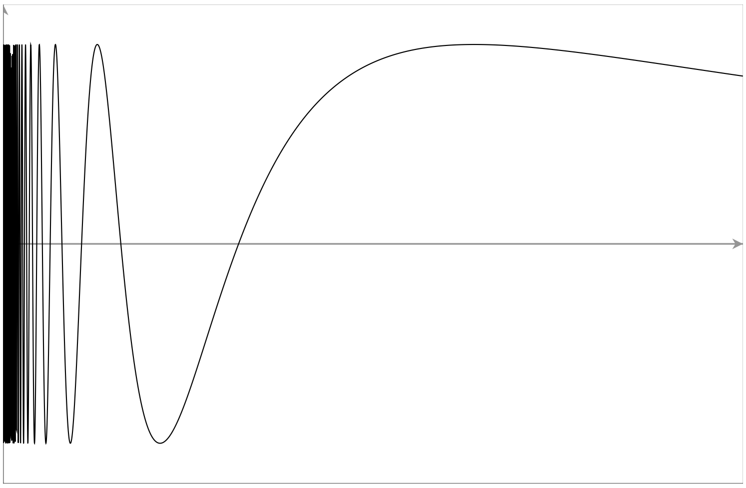
Sandrine CARUSO

Non connexité par arcs de $\overline{\{(x, \sin \frac{1}{x}), x \in]0,1]\}}$.

Référence : Gostiaux

On pose $G = \{(x, \sin \frac{1}{x}), x \in]0,1]\}$. En tant que graphe d'une fonction continue sur un ensemble connexe, G est connexe, et la fermeture d'un connexe étant connexe, $\overline{G}$ est également connexe. En revanche,

Proposition. *L'espace topologique $\overline{G}$, muni de la topologie induite par celle de $\mathbb{R}^2$, n'est pas connexe par arcs. Plus précisément, il a exactement deux composantes connexes par arcs : G et $\{0\} \times [-1,1]$.*



Commençons par établir le fait que $\overline{G} = (\{0\} \times [-1,1]) \cup G$. Tout d'abord, $\overline{G} \subset (\{0\} \times [-1,1]) \cup G$ car la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ est bornée par -1 et 1. Soit maintenant $\alpha \in [-1,1]$. On définit la suite (x_n) par

$$x_n = \frac{1}{\arcsin \alpha + 2n\pi}.$$

On a $\sin \frac{1}{x_n} = \alpha$, et x_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Donc la suite $(x_n, \sin \frac{1}{x_n})$ de G tend vers le point $(0, \alpha)$ de $\{0\} \times [-1,1]$, ce qui montre que $(\{0\} \times [-1,1]) \cup G \subset \overline{G}$. D'où l'égalité de ces deux ensembles.

Les espaces G et $\{0\} \times [-1,1]$ sont bien sûr chacun connexe par arcs (G comme graphe d'une fonction continue sur un connexe par arcs). Soient $a = (0, \alpha) \in \{0\} \times [-1,1]$ et $b = (\beta, \sin \frac{1}{\beta}) \in G$. Montrons qu'il n'existe pas de chemin continu reliant a et b sur $\overline{G}$. Supposons par l'absurde qu'il en existe un : $\gamma : [0,1] \to \overline{G}$, continu, tel que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. On pose $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ où $u, v : [0,1] \to \mathbb{R}$ sont continues, et vérifient, pour tout t, soit $u(t) = 0$ et $v(t) \in [-1, 1]$, soit $u(t) > 0$ et $v(t) = \sin \frac{1}{u(t)}$. Considérons l'ensemble $\Omega = \{t \in [0, 1], u(t) > 0\}$. Comme u est continue, c'est un ouvert de $[0, 1]$. De plus, $[0, 1]$ étant localement connexe, les composantes connexes de Ω sont tous des intervalles ouverts dans $[0, 1]$. Soit J l'une de ces composantes connexes. Elle est de l'une des formes suivants : $]c, d[$, $[0, d[$, $]c, 1]$ ou $[0, 1]$, avec $0 \leqslant c < d \leqslant 1$. Mais comme $\gamma(0) = (u(0), v(0)) = (0, \alpha)$, on a $u(0) = 0$ et donc $0 \notin \Omega$. En particulier, $0 \notin J$, et donc $J =]c, d[$ ou $]c, 1]$. L'élément c n'est pas dans J, donc pas dans Ω : s'il l'était, J serait inclus dans un connexe $J \cup \{c\}$ strictement plus grand, ce qui est impossible. Donc $u(c) = 0$. L'ensemble $u(J)$ est un intervalle (car image connexe d'un intervalle), inclus dans $]0, +\infty[$, et puisque $u(c) = 0$, la borne inférieur de $u(J)$ est 0. Sur un tel intervalle, la fonction $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ prend une infinité de fois chaque valeur entre -1 et 1, et on en déduit que $\sin \frac{1}{u(t)}$ n'a pas de limite lorsque t tend vers c par valeurs supérieurs. Or, pour $t \in J$, $\sin \frac{1}{u(t)} = v(t)$ et $v(t)$ tend vers $v(c)$ lorsque t tend vers c (car v est continue). On a une contradiction.