Sandrine CARUSO

# Suite de Sturm.

Référence : Francinou - Gianella - Nicolas, Oraux X-ENS, Algèbre 1

**Proposition.** *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On considère la suite $(S_i)_{1 \leqslant i \leqslant p+1}$ définie par $S_0 = P$, $S_1 = P'$, et pour $i \geqslant 1$, $S_{i+1}$ est l'opposé du reste dans la division euclidienne de $S_{i-1}$ par $S_i$ (autrement dit, $\deg S_{i+1} < \deg S_i$ et il existe $Q_i$ tel que $S_{i-1} = Q_i S_i - S_{i+1}$). On suppose que $S_{p+1} = 0$ et donc que $S_p = \mathrm{PGCD}(P, P')$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note*

$$V(x) = \#\{(i,j), 0 \leqslant i < j \leqslant p, S_i(x)S_j(x) < 0 \text{ et } \forall k \in [\![i,j]\!], S_k(x) = 0\}$$

*le nombre de changements de signes dans la suite $S_0, \dots, S_p$. Soient $a < b \in \mathbb{R}$, non racines de $P$. Alors le nombre de racines (réelles) distinctes dans l'intervalle $[a,b]$ est égal à $V(a) - V(b)$.*

Dans un premier temps, on commence par se ramener au cas où $P$ n'a que des racines simples. Notons que pour tout $i$, $S_p = \mathrm{PGCD}(S_i, S_{i+1})$, et en particulier $S_p$ divise $S_i$. On pose $T_i = \frac{S_i}{S_p}$. Alors $T_0 = \frac{P}{\mathrm{PGCD}(P,P')}$ a exactement les mêmes racines (distinctes) que $P$, mais elles sont simples. De plus, la suite $T_i$ vérifie encore $T_{i-1} = Q_i T_i - T_{i+1}$, et enfin, pour tout $x$, le nombre de changements de signe dans la suite $T_i(x)$ est égal au nombre de changements de signes dans la suite $S_i(x)$ puisqu'on a divisé tous ces termes par un même nombre $S_p(x)$.

On peut donc supposer que $P$ n'a que des racines simples, et par conséquent que $S_p = 1$. Par suite, $S_i$ et $S_{i+1}$ sont premiers entre eux pour tout $i$, et donc n'ont pas de racine commune. Sur chaque intervalle sur lequel aucun des $S_i$ ne s'annule, la fonction $V$ est constante. L'ensemble des racines des $S_i$ est un ensemble fini, et par conséquent, pour établir le résultat souhaité, il suffit de montrer que

– Si $x$ « traverse » une racine de $P$, alors $V(x)$ diminue de $1$.
– Si $x$ « traverse » une racine d'un $S_i$ qui n'est pas racine de $P$, alors $V(x)$ ne change pas.

En effet, par une récurrence immédiate, $V(a) - V(b)$ sera bien égal au nombre de racines distinctes de $P$ dans $[a,b]$.

Soit donc $\alpha$ une racine de $P$. Alors $\alpha$ est nécessairement un minimum de $P^2$. La dérivée de ce polynôme est $2PP'$, qui est alors négative puis positive sur un voisinage de $\alpha$. Ainsi, pour $h \in \mathbb{R}$ tel que $|h|$ est assez petit, $P(\alpha+h)P'(\alpha+h)$ est du signe (strict) de $h$, et il y a donc un changement de signe de plus avant $\alpha$ qu'après $\alpha$.

Soit maintenant $\alpha$ une racine de $S_i$, $i \neq 0$. On a $S_{i-1} = Q_i S_i - S_{i+1}$ et donc $S_{i-1}(\alpha) = -S_{i+1}(\alpha)$. Grâce à l'hypothèse faite sur $P$, on sait que ni $S_{i-1}$, ni $S_{i+1}$ n'a de racine commune avec $S_i$, et on déduit de l'égalité précédente que

$$S_{i-1}(\alpha)S_{i+1}(\alpha) < 0.$$

Par continuité, pour tout $x$ assez proche de $\alpha$, $S_{i-1}(x)S_{i+1}(x) < 0$ ce qui prouve que $V$ reste constante au voisinage de $\alpha$.