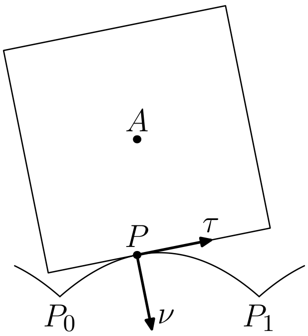
Sandrine CARUSO

Vélo à roues carrées

Le but de ce développement est de déterminer quel profil doit avoir une route pour qu'un vélo à roues carrées puisse rouler sans glisser dessus, de manière à ce que l'axe de rotation (supposé au centre) de la roue reste sur une même droite verticale.

Il suffit d'étudier le profil de la route entre deux points P_0 et P_1 en lesquels deux sommets consécutifs C_0 et C_1 du carré sont en contact avec la route.

Soit A le centre de la roue que l'on suppose de côté 2. On note P le point de contact de la roue et de la route, s une abscisse curviligne le long de la route, d'origine P_0, et τ et ν les vecteurs unitaires tangent et normal en P, comme sur la figure ci-dessous.



Nous allons déterminer la courbure que doit avoir la route. Nous exhiberons ensuite une courbe qui a également cette courbure, et utiliserons le fait que deux courbes planes ayant la même courbure sont isométriques. Notons c la courbure.

Comme la roue roule sans glisser, la distance de P au sommet C_0 du triangle est égale à s, et ainsi, on a $A = P + (1-s)\tau - \nu$. Le fait que A reste sur la même droite se traduit par le fait que le vecteur unitaire tangent à la trajectoire de A est constant. Calculons ce vecteur. La dérivée de A par rapport à s est $\frac{dA}{ds} = \frac{dP}{ds} - \tau + (1-s)\frac{d\tau}{ds} - \frac{d\nu}{ds}$. On a $\frac{dP}{ds} = \tau$, et en utilisant les formules de Frenet et la nullité de la torsion, il vient

$$\frac{dA}{ds} = (1-s)c\nu + c\tau.$$

Nous allons, un peu abusivement, faire l'hypothèse que c ne s'annule pas. Le vecteur tangent unitaire à la trajectoire de A est

$$u = \frac{dA/ds}{\|dA/ds\|} = \frac{(1-s)\nu + \tau}{\sqrt{(1-s)^2+1}}.$$

Dérivons ce vecteur par rapport à s. Tous calculs faits, on obtient

$$\frac{du}{ds} = \frac{-1 + c((1-s)^2+1)}{((1-s)^2+1)^{3/2}}(\nu - (1-s)\tau).$$

Comme cette dérivée doit être nulle, on en déduit que

$$c = \frac{1}{(1-s)^2+1}.$$

Considérons maintenant la courbe d'équation $f(x) = \operatorname{ch} x$ définie sur l'intervalle $[-l, l]$ avec $l = \operatorname{argsh} 1$ (autrement dit, la courbe paramétrée $x = t, y = f(t)$, pour $t \in [-l, l]$). Les paramètres s et c désignent désormais l'abscisse curviligne (d'origine $-l$) et la courbure de cette courbe. On a

$$s(x) = \int_{-l}^{x} \sqrt{1+f'(t)^2}\,dt = \int_{-l}^{x} \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t}\,dt = \int_{-l}^{x} \operatorname{ch} t\,dt = \operatorname{sh} x + 1.$$

D'autre part, la courbure est donnée par

$$c = \frac{\|(1,f') \wedge (0,f'')\|}{\|(1,f')\|^3} = \frac{|f''|}{(1+f'^2)^{3/2}},$$

autrement dit

$$c(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{(1+\operatorname{sh}^2 x)^{3/2}} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

On veut exprimer c en fonction de s ; il vient donc

$$c(x) = \frac{1}{1+\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{1+(s(x)-1)^2}.$$

On en déduit que les deux courbures calculées sont égales, et donc que les deux courbes sont isométriques.

Il resterait à montrer qu'une roue carrée peut effectivement rouler sans glisser sur une courbe isométrique à cette portion de chaînette. Il y a quelques vérifications à faire : que la longueur de la portion de chaînette est bien égale à la longueur du côté du carré, ce qui est immédiat avec la formule $s(x) = \operatorname{sh} x + 1$, mais aussi que, une fois que l'on a recollé bout à bout de telles portions de chaînettes, l'angle entre deux chaînettes est égal à l'angle du carré $\frac{\pi}{2}$. Ce qui est un peu moins immédiat mais pas très difficile. On ne le fait pas ici. Voici l'allure d'une telle courbe.

Pour qu'un vélo, et pas seulement une roue (ou un monocycle) puisse rouler sur cette courbe, il faut encore que l'écartement des deux roues ne soit pas quelconque, mais n'entrons pas dans ce genre de détails...