

STAGE OLYMPIQUE DE GRÉSILLON



Du 25 août au 1^{er} septembre 2007

Stage olympique de Grésillon, août 2007

Avant-propos

Le stage de Grésillon a été organisé par Animath.

*Son objet a été de rassembler les lauréats de diverses compétitions mathématiques
et de les faire travailler sur des exercices en vue de la formation
de l'équipe qui représentera la France à l'Olympiade internationale de mathématiques
en Espagne en juillet 2008.*

Nous tenons à remercier le château de Grésillon pour son excellent accueil.

Table des matières

I	Le trombinoscope	7
II	Déroulement du stage	11
1	Emploi du temps	11
2	Colles et travaux pilotés électroniquement (TPE)	11
III	Les exercices	13
1	En TD	13
1.1	Les énoncés	13
1.2	Les solutions	23
2	En colle	47
2.1	Les énoncés	47
2.2	Les solutions	54
3	En TPE	74
3.1	Les énoncés	74
3.2	Les solutions	83
4	Les tests	108
4.1	Les énoncés	108
4.2	Les solutions	110
IV	Quelques informations sur les olympiades internationales	117
1	Compte-rendu des OIM 2007 (Hanoï, Vietnam) par Xavier Caruso	117
2	Sujets des OIM 2007	125
3	Sujets des OIM 2006	126

I. Le trombinoscope

Les profs



Xavier Caruso



François Charles



Pierre Dehornoy



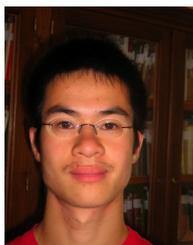
Sandrine Henri



Bodo Lass



François Lo Jacomo



Rémy Oudompheng



Ilia Smilga



Dimitri Zvonkine

Les élèves

Mathieu Aria



Anca Arnautu



Guillaume B.



Louise Bertin



Lucas Boczkowski



François Caddet



Pierre Camilleri



Philippe Cloarec



Martin Clochard



Marc Coiffier



Noémie Combe



Thomas Cruzel



Jean-Alix David



Camille Dessirier



Yrvann Emzivat



Juliette Fournier



William Fujiwara



Marcus Hanzig



Alice Héliou



Amélie Héliou



Dmitry Ivanov



Vincent Langlet



Adrien Laroche



Charlotte Le Mouel



Anaïs Lecerf



Merlin Legrain



Ambroise Marigot



Léonard Martelli



Maxime Martelli



Jean-François Martin



Jeanne Nguyen



Alexandre Nolin



Quentin Soulet
de Brugières



Florian Tep



Rémi Varloot



Rémi Vergnaud



Christopher Wells



Thomas Williams



Jean-Denis Zafar

II. Déroulement du stage

1 Emploi du temps

Une grande partie de la journée du samedi 25 août a été consacrée à l'accueil des élèves. Cette année, étant donné le nombre important d'élèves, nous avons décidé de former deux groupes de niveau (Avancé et Balbutiant). Le programme de la semaine était le suivant

		groupe A	groupe B
stratégie de base	dim. 26 matin	TD (François Charles)	Cours (Sandrine Henri)
	dim. 26 après-midi	colles et TPE	TD (Xavier Caruso)
	dim. 26 soirée	Compléments	
	lun. 27 matin	TD (Rémy Oudompheng)	colles et TPE
	lun. 27 après-midi	Test	
	lun. 27 soirée	Suites et fonctions (F. Lo Jacomo)	
géométrie	mar. 28 matin	TD (Bodo Lass)	Cours (Pierre Dehornoy)
	mar. 28 après-midi	colles et TPE	TD (Rémy Oudompheng)
	mar. 28 soirée	Constructions à la règle et au compas (S. Henri)	
	mer. 29 matin	TD (Pierre Dehornoy)	colles et TPE
	mer. 29 après-midi	Test	
	mer. 29 soirée	Présentation des OIM (I. Smilga), Nœuds (P. Dehornoy)	
arithmétique	jeu. 30 matin	TD (François Lo Jacomo)	Cours (François Charles)
	jeu. 30 après-midi	colles et TPE	TD (Rémy Oudompheng)
	jeu. 30 soirée		
	ven. 31 matin	TD (Rémy Oudompheng)	colles et TPE
	ven. 31 après-midi	Test	
	ven. 31 soirée		

2 Colles et travaux pilotés électroniquement (TPE)

L'organisation du créneau consacré à cette discipline était le suivant. Pendant que trois groupes de trois élèves subissaient une colle, les autres planchaient sur les TPE.

Le principe des colles est très semblable à celui pratiqué dans les classes préparatoires ; pendant une heure ou une heure et quart, un groupe d'élèves se retrouvait devant un examinateur (l'un des professeurs du stage) qui lui proposait un exercice très relié au thème de la journée. Nous donnons dans le chapitre suivant la liste des exercices de colles résolus. La liste des groupes de colles et le colloscope sont donnés dans les tableaux suivants :

Groupe A		Groupe B	
1	Juliette Fournier Marcus Hanzig Rémi Vergnaud	11	Pierre Camilleri William Fujiwara Quentin Soulet de Brugières
2	Alice Héliou Jean-François Martin Rémi Varloot	12	Yrvann Emzivat Anaïs Lecerf Merlin Legrain
3	Amélie Héliou Vincent Langlet Christopher Wells	13	Martin Aria Anca Arnautu Léonard Martelli
4	Philippe Cloarec Thomas Cruzel Charlotte Le Mouel	14	Jean-Alix David Dmitry Ivanov Jean-Denis Zafar
5	Martin Clochard Camille Dessirier Jeanne Nguyen	15	Noémie Combe Maxime Martelli Alexandre Nolin
6	Lucas Boczkowski Adrien Laroche Ambroise Marigot	16	Guillaume B. Louise Bertin Thomas Williams
		17	François Caddet Marc Coiffier Florian Tep

		Stratégies de base	Arithmétique	Géométrie
François Charles	14h00	1	6	2
	15h30	4	3	5
	33h00	11	16	15
	34h10	14	13	12
	35h20	17		
Bodo Lass	14h00	2	4	3
	15h30	5	1	6
	33h00	12	17	16
	34h10	15	11	13
	35h20		14	
François Lo Jacomo	14h00	3	5	1
	15h30	6	2	4
	33h00	13	15	14
	34h10	16	12	17
	35h20			11

Les TPE fonctionnaient de la façon suivante. Les élèves seuls, ou par groupe de deux ou trois, demandaient un exercice, et celui-ci était tiré au hasard par l'ordinateur parmi une liste de cent, à l'aide d'une méthode tenant compte du niveau de l'élève et de la difficulté de l'exercice. Une fois la solution trouvée et rédigée, elle nous était rendue et nous effectuions la correction. Si elle était juste, les élèves pouvaient obtenir un nouvel exercice, de même dans le cas d'abandon de l'exercice. Selon le cas, le niveau de l'élève augmentait ou diminuait. Nous donnons dans le chapitre suivant la liste complète des exercices proposés, ainsi que leurs solutions.

III. Les exercices

1 En TD

1.1 Les énoncés

Stratégie de base (groupe A)

Exercice 1. Montrer que le nombre de sous-ensembles à 3 éléments de $\{1, \dots, 63\}$ dont la somme est supérieure à 95 est plus grand que le nombre de ceux dont la somme est inférieure à 95.

Exercice 2. On se donne un ensemble S de $n > 4$ points du plan, coloriés en rouge et noir. On suppose que trois points de la même couleur ne sont jamais alignés. Montrer que l'on peut trouver trois points de la même couleur formant un triangle dont au moins l'un des côtés ne contient pas de point de S .

Exercice 3. Soit P un polygone convexe d'aire 1. Montrer qu'il existe un rectangle d'aire 2 qui le contient. Peut-on améliorer le résultat ?

Exercice 4. On tire 51 nombres entre 1 et 100. Montrer que l'on peut en trouver un qui divise l'autre.

Exercice 5. 25 personnes sont dehors, armées d'un pistolet à eau. Au même moment, chacun tire sur la personne la plus proche de lui (que l'on suppose unique). Montrer que quelqu'un n'est pas mouillé.

Exercice 6. Vingt enfants attendent leurs grands-pères dans la cour de la maternelle. Deux enfants quelconques ont toujours un grand-père commun. Prouver qu'un des grands-pères a au moins 14 petits enfants dans cette école maternelle.

Exercice 7. Dans un stage olympique, on trouve a stagiaires et b examinateurs, où b est impair et vaut au moins 3. Chaque examinateur décide pour chaque stagiaire s'il a réussi ou raté le stage. Soit k un nombre entier tel que deux examinateurs ne peuvent avoir le même avis sur plus de k élèves. Montrer l'inégalité

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}.$$

Exercice 8 (OIM 1972). Prouver que de tout ensemble de 10 entiers naturels à deux chiffres, on peut extraire deux sous-ensembles disjoints dont la somme de tous les éléments sont égales.

Exercice 9 (Tournoi des villes 1988). Est-il possible de recouvrir le plan par des cercles de sorte que par tout point passent exactement 1988 de ces cercles ?

Exercice 10 (URSS 1977). On considère un ensemble fini de points du plan, non tous alignés. A chacun de ces points, on attribue un nombre de sorte que, pour toute droite passant par au moins deux de ces points, la somme des nombres de tous les points de cette droite soit égale à 0.

Prouver que tous les nombres sont égaux à 0.

Exercice 11. Soient n et k deux entiers strictement positifs. On considère une assemblée de k personnes telle que, pour tout groupe de n personnes, il en existe une $(n + 1)$ -ième qui les connaît toutes. (La relation « se connaître » est symétrique.)

a) Si $k = 2n + 1$, prouver qu'une des personnes de l'assemblée connaît toutes les autres.

b) Si $k = 2n + 2$, donner un exemple d'une telle assemblée dans laquelle personne ne connaît tous les autres.

Exercice 12 (*Angleterre 2003*). Soit f une permutation de \mathbb{N}^* .

a) Prouver qu'il existe une progression arithmétique de trois termes $a, a + d, a + 2d$, avec $d > 0$, telle que $f(a) < f(a + d) < f(a + 2d)$.

b) Existe-t-il nécessairement une progression de 2004 termes $a, a + d, \dots, a + 2003d$, avec $d > 0$, telle que $f(a) < f(a + d) < \dots < f(a + 2003d)$?

Exercice 13 (*Tournoi des villes 2001*). Initialement, on dispose de trois piles contenant respectivement 51, 49 et 5 jetons. Deux types de mouvements sont autorisés :

a) on réunit deux piles en une seule,

b) on peut diviser une pile contenant un nombre pair de jetons en deux piles égales.

Est-il possible d'obtenir une configuration avec 105 piles de un jeton à l'aide d'un nombre fini de telles opérations ?

Exercice 14. On considère un damier rectangulaire comportant $2m$ lignes et $2n$ colonnes. Dans chaque case, se trouve soit un jeton rouge soit un jeton vert. Chaque ligne contient autant de jetons rouges que de jetons verts, et de même pour les colonnes. Deux jetons rouges adjacents d'une même ligne ou d'une même colonne sont joints par un segment rouge. De même les jetons verts par des segments verts. Prouver que le nombre de segments rouges est égal au nombre de segments verts.

Exercice 15 (*Hongrie 2004*). Un palais a la forme d'un carré divisé en 2003×2003 pièces, comme les cases d'un grand échiquier. Il y a une porte entre deux pièces si et seulement si elles ont un mur en commun. La porte principale permet, venant de l'extérieur du palais, d'entrer dans le palais par la pièce située au coin nord-ouest. Une personne entre dans le palais, visite certaines des pièces, puis ressort du palais, par la porte d'entrée, alors qu'il revient pour la première fois dans la pièce du coin nord-ouest. Il apparaît qu'il a visité chacune des autres pièces exactement 100 fois, sauf la pièce située au coin sud-est. Combien de fois le visiteur a-t-il été dans la pièce du coin sud-est ?

Exercice 16 (*Olympiade de Leningrad 1989*). Soit $k > 1$ un entier. Prouver qu'il est impossible de placer les nombres $1, \dots, k^2$, un dans chaque cases d'un tableau carré $k \times k$ de sorte que les sommes de tous les nombres marqués dans une ligne ou dans une colonne soit toujours une puissance de 2 (pas nécessairement toujours la même).

Exercice 17 (*Bulgarie 1987*). Soit $k > 1$ un entier. Prouver qu'il existe un nombre premier p et une suite d'entiers $(a_n)_{n>1}$ strictement croissante tels que la suite $(p + ka_n)_{n>1}$ soit entièrement formée de nombres premiers.

Exercice 18 (*Kazakstan 2003*). Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = b_0 = 0$ et $a_n = a_{n-1}^2 + 3$ et $b_n = b_{n-1}^2 + 2^n$.

Comparer les nombres a_{2003} et b_{2003} .

Exercice 19 (*Olympiade de Leningrad 1988*). Dans un immeuble de 120 appartements, vivent 119 locataires. Un de ces appartements sera dit *surpeuplé* lorsqu'au moins 15 personnes y habitent. Chaque jour, tous les locataires d'un appartement surpeuplé, s'il y en a, s'en vont habiter dans des appartements différents quelconques. Arrivera-t-il un jour où il n'y aura plus d'appartements surpeuplés ?

Exercice 20 (*Olympiades académiques 2004*). On considère un entier $n \geq 3$.

Dans un tournoi des n nations, chaque nation joue avec les $n - 1$ autres.

Le classement se fait selon le nombre de matchs gagnés (un match ne pouvant être que gagné ou perdu). En cas d'égalité, le classement se fait en regardant le nombre de points marqués.

Faire le grand chelem, c'est gagner tous ses matchs. Obtenir la cuillère de bois, c'est perdre tous ses matchs.

a) Existe-t-il des tournois pouvant donner ces scores :

Tournoi des 6 nations.

Equipe	Victoires	Défaites
A	5	0
B	4	1
C	4	1
D	1	4
E	1	4
F	0	5

Tournoi des 5 nations.

Equipes	Victoires	Défaites
A	3	1
B	3	1
C	2	2
D	1	3
E	1	3

b) Démontrer que les entiers n pour lesquels il existe un tournoi où le vainqueur a autant de victoires que de défaites sont les entiers impairs.

c) Pour quelles valeurs de n existe-t-il un tournoi où le second compte plus de défaites que de victoires ?

d) Pour quelles valeurs de n existe-t-il un tournoi où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués ?

e) Pour quelle valeur minimale de n existe-t-il un tournoi où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués, sachant qu'il n'y a pas eu de grand chelem ?

f) Soit $k \geq 0$ un entier fixé. Pour quelle valeur minimale de n existe-t-il un tournoi où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués, sachant que le premier a au moins k défaites ?

Exercice 21. Si a, b, c sont trois nombres, il est autorisé de transformer (a, b, c) en $(a, b, 2a + 2b - c)$ ou d'échanger les places de deux des nombres. Est-il possible de transformer $(1, 21, 42)$ en $(5, 13, 40)$ à l'aide d'un nombre fini de telles opérations ?

Stratégie de base (groupe B)

Exercice 22. a) Montrer que parmi 101 entiers, il en existe toujours deux dont la différence est multiple de 100.

b) Montrer que parmi 502 entiers, il en existe toujours deux dont la somme ou la différence est multiple de 1000.

c) Soient a_1, \dots, a_n des entiers. Montrer qu'il existe une partie non vide $I \subset \{1, \dots, n\}$ telle que la somme $\sum_{i \in I} a_i$ soit multiple de n .

Exercice 23. Montrer que dans un ensemble fini d'au moins deux personnes, il y en a toujours au moins deux qui connaissent exactement le même nombre de gens. (On supposera que la relation de connaissance est symétrique et on conviendra qu'une personne ne se connaît pas elle-même.)

Exercice 24. Soit $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction vérifiant :

$$4f(x, y) = f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x+1, y) + f(x, y-1).$$

Montrer que f est constante.

Exercice 25. Trouver toutes les suites $(a_n)_{n \geq 1}$ de réels strictement positifs telles que pour tout entier n , on ait :

$$\sum_{i=1}^n a_i^3 = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^2.$$

Exercice 26. Soient $a_1 < \dots < a_n < \dots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs telle que tout entier $k > 0$ appartienne à la suite ou puisse s'écrire comme la somme de deux termes, éventuellement égaux, de la suite.

Prouver que $a_n \leq n^2$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 27. On démarre avec un grand morceau de papier. On le déchire en quatre. On choisit ensuite un des quatre morceaux que l'on déchire à nouveau en quatre et ainsi de suite un certain nombre de fois. Est-il possible d'avoir après ces opérations 2007 petits bouts de papier ?

Exercice 28. Peut-on paver, avec des dominos 2×1 , un damier 8×8 auquel on a retiré deux coins opposés ?

Exercice 29. À quelle condition est-il possible de paver un damier rectangulaire $x \times y$ par des briques de taille $n \times 1$?

Exercice 30. Dans un grand sac, on a placé 2007 boules noires et 2007 boules blanches. On retire deux boules du sac au hasard : si elles n'ont pas la même couleur, on repose la boule blanche dans le sac et on met la noire de côté tandis que si elles ont la même couleur, on les retire toutes les deux du sac. On recommence la manipulation jusqu'à ce qu'il reste zéro ou une boule.

Montrer qu'il reste en fait une boule dans le sac et déterminer sa couleur.

Exercice 31. Dans chacune des 16 cases-unité d'un carré 4×4 , on a écrit un + sauf dans la deuxième case de la première ligne. On peut effectuer les trois opérations suivantes :

- ☞ Changer le signe de chacune des cases d'une ligne.
- ☞ Changer le signe de chacune des cases d'une colonne.
- ☞ Changer le signe de chacune des cases d'une diagonale (pas seulement les deux diagonales principales).

Est-il possible d'obtenir une configuration pour laquelle chaque case contiendrait un + à l'aide d'un nombre fini de telles opérations ?

Exercice 32. Dans chaque case d'un échiquier 8×8 , on a écrit le nombre 1. On répète 2003 fois l'opération suivante : on choisit un carré 3×3 et on augmente d'une unité la valeur de toutes les cases intérieures à ce carré (donc on incrémente 9 nombres).

Montrer qu'il existe un carré 4×4 tel que la somme des nombres écrits dans ses quatre coins est 2007.

Exercice 33. Peut-on colorier les entiers strictement positifs en deux couleurs de telle façon à n'avoir aucune progression arithmétique (infinie) monochrome ?

Exercice 34. Est-il possible de colorier le plan en deux couleurs de telle façon à n'avoir aucun segment (non réduit à un point) monochrome ?

Exercice 35 (*Tournoi des villes 1987*). On choisit une case d'un échiquier classique 8×8 , dont les cases sont alternativement blanches et noires. On désigne par a (resp. b) la somme des carrés des distances du centre du carré choisi aux centres des carrés noirs (resp. blancs).

Prouver que $a = b$.

Exercice 36 (*Biélorussie 2002*). *a*) Déterminer tous les entiers $k \geq 3$ pour lesquels il existe un ensemble de k entiers strictement positifs deux à deux jamais premiers entre eux, et trois quelconques premiers entre eux dans leur ensemble.

b) Existe-t-il un ensemble infini d'entiers strictement positifs ayant la même propriété ?

Exercice 37. Dans le plan, on a tracé $n > 0$ droites. Prouver que l'on peut colorier les régions ainsi délimitées soit en rouge soit en bleu, de sorte que deux régions quelconques séparées par un segment soient toujours de couleurs différentes.

Exercice 38. Soit $n > 1$ un entier. Prouver que dans tout sous-ensemble de $\{1, \dots, 2n\}$ contenant $n + 2$ éléments, on peut toujours en trouver trois distincts dont l'un est la somme des deux autres.

Exercice 39 (*Olympiades académiques 2004*). Un entier $n \geq 2$ est dit *académique* si on peut répartir les entiers $1, 2, \dots, n$ en deux groupes disjoints \mathcal{S} et \mathcal{P} , de sorte que la somme des nombres du groupe \mathcal{S} soit égale au produit des nombres du groupe \mathcal{P} .

Déterminer tous les entiers académiques.

Exercice 40. On considère six points dans le plan, trois jamais alignés. On colorie en rouge ou en bleu chacun des segments qui les relient deux à deux.

Prouver que, quelle que soit la coloration, il y aura toujours un triangle monochrome.

Exercice 41. On considère six points dans le plan, trois jamais alignés et on suppose que les distances entre deux points sont toutes distinctes. Montrer qu'il existe un triangle dont le plus petit côté est le même que le plus grand côté d'un autre triangle.

Exercice 42 (*Olympiade de Leningrad 1988*). On place un jeton dans certaines cases, mais pas toutes, d'un échiquier $n \times n$, où $n > 0$ est entier. A chaque seconde, l'un des jetons passe d'une case à une autre qui est vide. Après un certain nombre de tels mouvements, on s'aperçoit que chaque jeton est de retour dans sa case initiale après avoir visité toutes les autres cases une et une seule fois. Prouver qu'il y a eu un instant où aucun jeton n'était dans sa case initiale.

Exercice 43. On se donne $mn + 1$ de l'espace tels que, parmi $m + 1$ quelconques d'entre eux, on puisse toujours en trouver deux à une distance au plus égale à 1 l'un de l'autre. Prouver qu'il existe une sphère de rayon 1 contenant au moins $n + 1$ de ces points.

Exercice 44 (*Ukraine 2001*). Trois pays ont chacun envoyé n mathématiciens à une conférence. Chaque mathématicien a des échanges avec au moins $n + 1$ des mathématiciens qui ne sont pas de son pays. Prouver qu'il existe trois mathématiciens qui ont deux à deux eu des échanges.

Exercice 45. Un polygone régulier convexe à 1997 sommets a été décomposé en triangles en utilisant des diagonales qui ne s'intersectent pas intérieurement. Combien de ces triangles sont-ils acutangles ?

Exercice 46 (*Olympiades académiques 2005*). On dispose de 100 cartes. Sur chacune sont écrits deux entiers consécutifs, de sorte que chacun des entiers $1, 2, \dots, 200$ soit écrit sur une des cartes.

- a) Alice a choisi 21 cartes au hasard. Elle fait la somme de tous les entiers écrits sur ses cartes et annonce à Bob que cette somme vaut 2004. Prouver qu'Alice s'est trompée dans son calcul.
- b) Alice recompte et annonce cette fois 2005. Prouver qu'elle s'est à nouveau trompée dans son calcul.
- c) En fait, le vrai total d'Alice est 2003. Pendant ce temps, Bob a choisi 20 cartes au hasard parmi celles qui restaient. Il fait la somme des nombres écrits sur ses cartes et annonce à Alice que cette somme vaut 1396. Prouver que Bob s'est trompé dans son calcul.

Exercice 47 (*Roumanie 2005*). Chaque point d'un cercle est colorié soit en vert soit en jaune de sorte que tout triangle équilatéral inscrit dans le cercle possède exactement deux sommets jaunes. Prouver qu'il existe un carré inscrit dans le cercle dont au moins trois des sommets sont jaunes.

Exercice 48 (*Canada 1987*). Dans une même très grande pièce, 2007 personnes sont disposées de sorte que leurs distances mutuelles soient deux à deux distinctes. Chaque personne est armée d'un pistolet à eau. A un signal donné, chacun tire sur la personne qui lui est la plus proche.

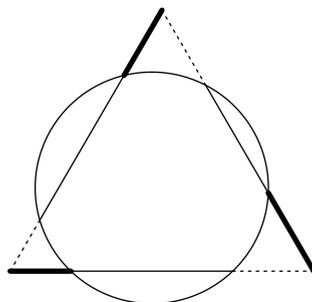
Prouver qu'au moins une personne reste sèche.

Exercice 49. On considère l'ensemble des points du plan à coordonnées entières, sur lesquels on pourra éventuellement placer des jetons. Une opération consiste à enlever un jeton situé en (x, y) et à en placer un en $(x + 1, y)$ et un en $(x, y + 1)$ si aucun de ces deux points ne possède déjà un jeton, sinon l'opération est impossible.

Initialement, on a placé un jeton sur chacune des cases $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Prouver qu'il est impossible de libérer ces trois points en un nombre fini d'opérations.

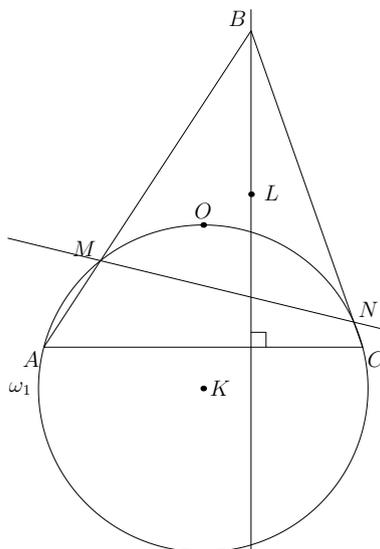
Géométrie

Exercice 50 (*Le Monde du 7 août 2007*). Soit ABC un triangle équilatéral, et un cercle coupant les 3 côtés. Montrer que la somme des distances en gras est égale à la somme des distances en pointillés.



Exercice 51 (*Canada, 1982*). Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On fixe un point O et on construit un quadrilatère $A'B'C'D'$ en posant $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{DA}$. Montrer que l'aire de $A'B'C'D'$ est double de celle de $ABCD$.

Exercice 52 (*Russie, 2000*). Soit ABC un triangle aigu, ω son cercle circonscrit, et O le centre de ω . On note ω_1 le cercle de centre K circonscrit à AOC . Il coupe (BA) et (BC) en M et N . Soit L le réflexion de K par rapport à (MN) . Montrer que (BL) est perpendiculaire à (AC) .



Exercice 53. Soient Γ un cercle, D une droite et a une longueur donnés. Construire une droite parallèle à D coupant le cercle Γ en deux points situés à une distance a .

Exercice 54. On considère trois droites parallèles D_1, D_2, D_3 . Construire un triangle équilatéral $A_1 A_2 A_3$ tel que les points A_1, A_2, A_3 appartiennent respectivement aux droites D_1, D_2, D_3 .

Exercice 55. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle équilatéral ABC . Soit M un point de l'arc d'extrémités B et C ne contenant pas A . Montrer qu'on a $AM = BM + CM$.

Exercice 56. Soit ABC un triangle, construire à la règle et au compas un carré dont un sommet appartient au côté AB , un sommet au côté AC et deux sommets adjacents appartiennent au côté BC .

Exercice 57. Soit $A_1 A_2 A_3$ un triangle et P_0 un point du plan. On définit $A_s = A_{s-3}$ pour $s \geq 4$. On construit une suite P_1, P_2, P_3, \dots de sorte que P_k soit l'image de P_{k-1} par la rotation de centre A_{k+1} et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Montrer que si $P_{2007} = P_0$, alors le triangle $A_1 A_2 A_3$ est équilatéral.

Exercice 58. Étant donnés trois cercles deux à deux disjoints, tracer les trois points d'intersection des tangentes extérieures communes à chaque paire de cercles. Montrer que ces trois points sont alignés.

Exercice 59 (OIM 1978). Soit ABC un triangle isocèle en A et Γ son cercle circonscrit. On note γ le cercle tangent aux droites AB et AC et tangent à Γ intérieurement. On note P, Q, R les points de contact de γ avec AB, AC, Γ respectivement. Enfin, ω est le centre de γ , J est le milieu de $[PQ]$ et K le milieu de $[BC]$.

Justifier l'égalité $\frac{AK}{AR} = \frac{AJ}{A\omega}$. En déduire que J est le centre du cercle inscrit à ABC .

Exercice 60 (L'angle au centre). Soient quatre points A, B, M et N sur un cercle Γ de centre O . Prouver la célèbre égalité $(MA, MB) = (OA, OB)/2 = (NA, NB)$.

Exercice 61 (Théorème de Miquel). Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points situés sur les côtés BC, CA, AB respectivement. Alors les cercles circonscrits aux triangles ARQ, BPR, CQP passent par un point commun.

Exercice 62 (Ptolémée). Soit $ABCD$ un quadrilatère. Prouver l'inégalité suivante :

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA,$$

avec égalité si et seulement si les points A, B, C, D sont cocycliques dans cet ordre (ce qui signifie que les droites (AC) et (BD) se coupent à l'intérieur du cercle).

Exercice 63 (*Puissance d'un point par rapport à un cercle*). Soient un cercle Γ et un point P . Soit D une droite passant par P et coupant le cercle en A et B (éventuellement confondus). Montrer que le produit $PA \cdot PB$ ne dépend que de P et de Γ , pas de la droite D . On l'appelle *puissance du point P par rapport au cercle Γ* .

Exercice 64 (*Axe radical de deux cercles*). Soit deux cercles Γ_1, Γ_2 de centres respectifs O_1, O_2 . Montrer que l'ensemble des points P tels que les puissances de P par rapport aux cercles Γ_1 et Γ_2 soient égales est une droite perpendiculaire à $(O_1 O_2)$. On l'appelle *axe radical* des cercles Γ_1 et Γ_2 .

Exercice 65. Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant aux points A et B . Soit Δ une tangente commune à Γ_1 et Γ_2 , C et D les points de contacts de Δ avec Γ_1 et Γ_2 . Soit P l'intersection des droites (AB) et (CD) , montrer qu'on a $PC = PD$.

Exercice 66 (*Point radical de trois cercles*). Soit $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ trois cercles. Montrer que leurs trois axes radicaux Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont soit confondus, soit concourants, soit parallèles.

Exercice 67. Soit A et B les intersections de deux cercles Γ_1 et Γ_2 . Soit CD une corde de Γ_1 et E et F les secondes intersections respectives des droites CA et BD avec Γ_2 . Montrer que les droites (CD) et (EF) sont parallèles.

Exercice 68 (*Droite de Simson*). Soit Γ un cercle et A, B, C trois points de Γ . Soit P un point du plan, P_A, P_B, P_C ses projections sur les droites $(BC), (CA), (AB)$. Montrer que les points P_A, P_B, P_C sont alignés si et seulement si P appartient à Γ .

Exercice 69. Soit l une droite passant par l'orthocentre du triangle ABC . Montrer que les symétriques de l par rapport aux côtés du triangle passent par un même point, montrer que ce point appartient au cercle circonscrit à ABC .

Exercice 70 (*OIM 1995*). Soit A, B, C, D quatre points distincts placés dans cet ordre sur une droite. Les cercles de diamètres $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en X et Y . La droite (XY) coupe (BC) en Z . Soit P un point distinct de Z sur la droite (XY) . La droite (CP) coupe le cercle de diamètre AC en C et M , et la droite (BP) coupe le cercle de diamètre BD en B et N . Prouver que les droites $(AM), (DN), (XY)$ sont concourantes.

Exercice 71 (*Triangle orthique*). Soit H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B, C d'un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus), soit H l'orthocentre de ce triangle. Montrer que

(i) les triangles $AH_B H_C, H_A B H_C, H_A H_B C$ sont directement semblables entre eux et indirectement semblables au triangle ABC ,

(ii) les hauteurs du triangle ABC sont les bissectrices intérieures du triangle $H_A H_B H_C$, appelé *triangle orthique*,

(iii) les symétriques de H par rapport aux trois côtés du triangle ABC appartiennent au cercle circonscrit à ABC .

Exercice 72 (*Le grand Triangle, le cercle et la droite d'Euler*). Dans un triangle ABC , on note A', B', C' les milieux respectifs des côtés BC, CA, AB , H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C .

(i) Montrer que les médianes $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes en un point G , qui divise chaque médiane en deux segments dont le rapport des longueurs vaut 2.

(ii) Montrer que les médiatrices de chaque côté du triangle sont concourantes en un point O , centre du cercle circonscrit à ABC .

(iii) Montrer que les hauteurs $(AH_A), (BH_B), (CH_C)$ sont concourantes en un point H , qu'on appelle *orthocentre* du triangle ABC .

(iv) Soit P_A, P_B, P_C les milieux respectifs de HA, HB, HC . Montrer que les neuf points $A', B', C', H_A, H_B, H_C, P_A, P_B, P_C$ appartiennent à un même cercle appelé *cercle d'Euler*, de centre Ω , milieu du segment $[OH]$, et de rayon $R/2$.

Exercice 73 (*Propriétés des bissectrices*). Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle Γ de centre O . Soit I le centre du cercle inscrit, I_A la seconde intersection de la bissectrice intérieure issue de A avec Γ . Montrer que

(i) les droites (I_AO) et (BC) sont perpendiculaires,

(ii) le cercle de centre I_A passant par B et C passe également par le point I .

Exercice 74. Soit ABC un triangle acutangle, soient L et N les intersections de la bissectrice interne de l'angle A avec (BC) et avec le cercle circonscrit à ABC . Soient K et M les projections de L sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que l'aire du quadrilatère $AKNM$ est égale à celle du triangle ABC .

Exercice 75. Montrer que les symétriques de chaque sommet d'un triangle par rapport au côté opposé sont alignés si et seulement si la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit est égale à son diamètre.

Exercice 76. Soit ABC un triangle, soit $A'B'C'$ un triangle directement semblable à ABC de telle sorte que A appartienne au côté $B'C'$, B au côté $C'A'$ et C au côté $A'B'$. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC , H son orthocentre et H' celui de $A'B'C'$. Montrer qu'on a $OH = OH'$.

Arithmétique

Exercice 77 (*USAMO, 1992*). On note a_n le nombre qui s'écrit en base 10 avec 2^n chiffres «9», pour $n \geq 0$. Soit $b_n = a_0 a_1 \cdots a_n$ le produit des premiers a_k . Quelle est la somme des chiffres de b_n ?

Exercice 78 (*Canada, 1970*). Trouver tous les entiers dont l'écriture décimale commence par 6, qui sont divisibles par 25 si on leur enlève le premier chiffre. Montrer qu'il n'existe pas d'entier divisible par 35 si on lui enlève son premier chiffre.

Exercice 79. Calculer la décomposition en facteurs premiers de 99. En déduire un critère de divisibilité par 11. Calculer la décomposition en facteurs premiers de 1001. En déduire un critère de divisibilité par 7, 11 ou 13 : par exemple 12142 est divisible par 13.

Exercice 80 (*Canada, 1983*). Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que p divise $2^n - n$.

Exercice 81 (*Engel*). Montrer que dans la suite $a_n = \sqrt{24n+1}$ figurent tous les nombres premiers sauf 2 et 3.

Exercice 82 (*Engel*). Montrer que si $2 + 2\sqrt{28n^2+1}$ est un entier, c'est même un carré parfait.

Exercice 83 (*Théorème de Wilson*). Montrer que si p est un nombre premier, p divise $(p-1)! + 1$. Montrer que si n n'est pas un nombre premier, n ne divise pas $(n-1)! + 1$. Calculer le reste de la division de $(n-1)!$ par n .

Exercice 84 (*Canada, 1985*). Montrer que $n!$ est divisible par 2^{n-1} si et seulement si n est une puissance de 2.

Exercice 85 (*Engel*). Montrer que l'équation $x^3 + 3 = 4y(y + 1)$ n'a pas de solutions entières.

Exercice 86 (*Canada, 1981*). Montrer qu'il n'existe pas de réel x tel que

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 16x \rfloor + \lfloor 32x \rfloor = 12345.$$

Exercice 87 (*Canada, 1996*). Soient r_1, \dots, r_m des rationnels positifs tels que $r_1 + \dots + r_m = 1$. On pose $f(n) = n - \sum \lfloor r_i n \rfloor$. Quelles sont les valeurs minimales et maximales prises par $f(n)$?

Exercice 88. Montrer que si deux entiers peuvent s'écrire sous la forme $a^2 - 7b^2$ (avec a et b deux entiers), leur produit peut encore s'écrire sous cette forme.

Exercice 89 (*Canada, 1994*). Montrer que pour tout $n > 0$, $(\sqrt{2} - 1)^n$ est de la forme $\sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

Exercice 90. Calculer le PGCD de $a^p - 1$ et $a^q - 1$, où a, p, q sont des entiers.

Exercice 91 (*Canada, 1993*). Montrer qu'un nombre x est rationnel si et seulement si on peut trouver des entiers a, b et c distincts tels que $x + a, x + b, x + c$ sont en progression géométrique.

Exercice 92 (*Canada, 1988*). On considère un ensemble de r entiers naturels $S = \{a_1, \dots, a_r\}$. Si A est une partie non-vide de S , on note p_A le produit de ses éléments, et $m(S)$ la moyenne arithmétique des p_A pour toutes les parties A non-vides de S .

On suppose que $m(S) = 13$ et $m(S \cup \{a_{r+1}\}) = 49$. Calculer a_{r+1} ainsi que la valeur des éléments de S .

Exercice 93 (*d'après Roumanie, 2000*). Soit a un entier impair, donné par son écriture en base 2. Trouver simplement, à partir de cette écriture, le plus petit entier n tel que $a^n - 1$ soit divisible par 2^{2007} .

Exercice 94 (*Pologne, 2000*). On considère une suite (p_n) de nombres premiers, telle que p_{n+1} soit le plus grand diviseur premier de $p_n + p_{n-1} + 2008$. Montrer que cette suite est bornée.

Exercice 95 (*Roumanie, 2000*). Soient n et k des entiers positifs non nuls fixés. Montrer qu'on peut trouver des entiers $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > k$ tels que

$$n = \pm \binom{a_1}{3} \pm \binom{a_2}{3} \pm \binom{a_3}{3} \pm \binom{a_4}{3} \pm \binom{a_5}{3}.$$

Exercice 96. On veut calculer la suite de Fibonacci modulo 139.

- Vérifier que 12 est solution de l'équation $y^2 = 5$ modulo 139.
- En déduire que les solutions de $x^2 - x - 1 = 0$ modulo 139 sont 64 et 76.
- Trouver un entier b tel que $12b = 1$ modulo 139.
- En déduire que si $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, $F_n \equiv b(76^n - 64^n)$ modulo 139.

Exercice 97. Trouver tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que :

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^2$$

Exercice 98. Soient a, b, m, n des entiers naturels vérifiant $a > 1$ et a et b premiers entre eux. Prouver que si $a^m + b^m$ divise $a^n + b^n$, alors m divise n .

Exercice 99. Trouver tous les entiers a, b, c vérifiant $1 < a < b < c$ tels que $(a-1)(b-1)(c-1)$ divise $abc-1$.

Exercice 100. Prouver qu'il existe une infinité d'ensembles de 2007 entiers positifs consécutifs tous divisibles par des nombres de la forme a^{2007} (a entier strictement supérieur à 1).

Exercice 101. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels a tels que $n^4 + a$ ne soit premier pour aucune valeur de n .

1.2 Les solutions

Stratégie de base (groupe A)

Solution de l'exercice 1. L'application qui a un ensemble de trois éléments $\{a, b, c\}$ associe l'ensemble $\{64-a, 64-b, 64-c\}$ est bien définie, bijective, et envoie un ensemble dont la somme des éléments est inférieure à 95 sur un ensemble dont la somme des éléments est supérieure à 95. Cela conclut.

Solution de l'exercice 2. Comme n vaut au moins 5, on peut trouver un triplet de points A, B et C tous de la même couleur. Supposons-le choisi de façon à ce que le triangle ABC soit de périmètre minimal. Montrons que ABC convient. On raisonne par l'absurde. Si ABC ne convient pas, chacun de ses trois côtés contient un point de couleur différente. Les trois points ainsi obtenus forment un triangle monochromatique de périmètre strictement inférieur à celui de ABC, ce qui est la contradiction attendue.

Solution de l'exercice 3. Soient A et B deux points de P à distance maximale. Le polygone P est entièrement contenu dans la bande bordée des deux perpendiculaires à AB passant par A et B respectivement. Soit R le plus petit rectangle s'appuyant sur ces deux droites et contenant P. Les deux côtés de R parallèles à AB contiennent chacun des points C et D de P. Le polygone P étant convexe, il contient entièrement le quadrilatère ACBD. Ce dernier est donc d'aire au plus 1, ce qui montre que R est d'aire au plus 2.

Solution de l'exercice 4. Tout nombre entier est le produit d'une puissance de 2 par un nombre impair. Par le principe des tiroirs, on peut trouver deux des 51 nombres choisis qui ont le même facteur impair. L'un est donc multiple de l'autre. On peut aussi démontrer le résultat par récurrence.

Solution de l'exercice 5. On va montrer que le résultat est toujours vrai si l'on remplace 25 par un entier impair n quelconque (supérieur ou égal à 3, pour que le problème ait un sens). On raisonne par récurrence sur n .

Si n est égal à 3, appelons A, B et C les trois personnes. Le triangle ABC n'est pas isocèle. Supposons que AB soit le plus court côté du triangle ABC. Alors A tire sur B et B tire sur A, donc personne ne tire sur C.

Supposons le résultat vrai pour n personnes, et donnons-nous $n+2$ personnes. Soient A et B deux d'entre elles telles que la distance entre eux soit minimale. A tire sur B, et B tire sur A. Si personne ne tire sur A ni sur B, l'hypothèse de récurrence montre que l'une des n personnes restantes s'échappe. Supposons donc que l'une de ces n personnes tire sur A ou sur B, qui est donc atteint deux fois. Puisqu'il y a $n+2$ tirs et $n+2$ personnes en tout, quelqu'un doit rester sain et sauf.

Solution de l'exercice 6. On suppose que chaque grand-père a au plus 13 petits-enfants. Soit A un des grands-pères. Ses petits enfants forment un ensemble S à $s \leq 13$ éléments. Soit x l'un d'entre eux. Il y

a au moins sept enfants dans la cour qui ne sont pas des petits-enfants de A . Si y est l'un d'entre eux, l'hypothèse de l'énoncé implique que x et y ont un grand-père commun, que l'on appelle B . C'est le second grand-père de x , qui est donc grand-père de tous les enfants qui ne sont pas dans S . Soit t le nombre de petits-enfants de B . Soit C le deuxième grand-père de y , et soit u le nombre de ses petits-enfants. Notons t' et u' les nombres respectifs de petits-enfants de B et de C qui sont dans S . Comme u' est non nul, le raisonnement précédent montre que l'on a $t = t' + 20 - s$ et $u = u' + 20 - s$. On a enfin $t' + u' = s$, d'où $s + t + u = 40$, ce qui implique que l'un des entiers s , t et u vaut au moins 14, et conclut.

Solution de l'exercice 7. Soit X l'ensemble des triplets (E_1, E_2, S) , où E_1 et E_2 sont deux examinateurs différents ayant le même avis sur le stagiaire S . On va estimer le cardinal de X de deux manières différentes.

Tout d'abord, un couple d'examineurs étant fixé, on peut trouver au plus k stagiaires le complétant en un triplet élément de X . On a donc $|X| \leq kb(b-1)$. D'autre part, un stagiaire S étant donné, soit x le nombre d'examineurs ayant un avis favorable sur S . Le nombre de couples d'examineurs fournissant avec S un triplet élément de X est $x(x-1) + (b-x)(b-x-1)$. Un argument de convexité montre que cette expression est minimale pour $x = \frac{b+1}{2}$ (car b est impair), auquel cas elle vaut $\frac{(b-1)^2}{2}$. Le cardinal de X est donc supérieur ou égal à $a \frac{(b-1)^2}{2}$. Mettant ensemble les deux inégalités, on conclut.

Solution de l'exercice 8. Soit E un ensemble de 10 entiers naturels à deux chiffres. Il y a $2^{10} - 1 = 1023$ sous-ensembles non vides de E . Pour un tel sous-ensemble, la somme S de ses éléments vérifie $10 \leq S \leq 90 + 91 + \dots + 99$, c.à.d. $10 \leq S \leq 945$.

Il n'y a donc qu'au plus 936 sommes possibles. Le principe des tiroirs assure qu'il existe alors deux sous-ensembles distincts, disons A et B , qui correspondent à la même somme. En éliminant les éléments communs à A et B , on obtient bien deux sous-ensembles disjoints dont la somme de tous les éléments sont égales.

Solution de l'exercice 9. Oui. On se donne un repère orthonormé du plan. On considère alors la famille \mathcal{F} de toutes les droites horizontales Δ_n d'équations de la forme $y = n$, où n décrit \mathbb{Z} . Puis, on trace tous les cercles tangents à deux droites Δ_n consécutives. Il est alors facile de vérifier que chaque point du plan appartient à exactement deux de ces cercles. Pour obtenir la conclusion désirée, il suffit alors d'effectuer cette construction pour les 994 familles $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{994}$ deux à deux disjointes où, pour tout i , la famille \mathcal{F}_i est formée des droites d'équations de la forme $y = n + \frac{i}{994}$ lorsque n décrit \mathbb{Z} .

Solution de l'exercice 10. On note M_1, \dots, M_k les points donnés et, pour tout i , on désigne par n_i le nombre attribué à M_i . On note $S = \sum_{i=1}^k n_i$. Soit m_1 le nombre de droites passant par M_1 et au moins un autre des points. Puisque les points ne sont pas tous alignés, on a $m_1 \geq 2$. De plus, chacun des autres points appartient à une et une seule de ces droites. Soit Δ l'une de ces droites. On sait que $\sum_{M_i \in \Delta} n_i = 0$ donc, en sommant toutes les égalités similaires obtenues pour les autres droites, on en déduit que $S + (m_1 - 1)n_1 = 0$. Supposons que $n_1 \neq 0$. Quitte à changer tous les nombres en leurs opposés, on peut supposer que $n_1 > 0$. L'égalité précédente assure alors que $S < 0$. Mais, un raisonnement analogue permet d'affirmer que, pour tout i , les nombres S et n_i sont de signes contraires. En particulier, $n_i > 0$ pour tout i , et donc $S > 0$. Contradiction. Ainsi, $n_1 = 0$. On prouve de même que $n_i = 0$ pour tout i .

Solution de l'exercice 11. a) On commence par construire, par récurrence, un groupe de $n + 1$ personnes qui se connaissent deux à deux : il est clair que l'on peut trouver deux personnes qui se connaissent. Supposons que pour $p \in \{2, \dots, n\}$ fixé, on ait réussi à trouver un groupe de p personnes qui se connaissent deux à deux. En complétant ce groupe par $n - p$ personnes quelconques, on forme un groupe de n personnes dont on sait qu'il en existe une $(n + 1)^{i\text{ème}}$ qui les connaît toutes. En ajoutant cette personne à notre groupe de p personnes, on forme ainsi un groupe de $p + 1$ personnes qui se connaissent deux à deux.

On considère donc un groupe G de $n + 1$ personnes qui se connaissent deux à deux. Puisque $k = 2n + 1$, il reste donc n personnes qui forment un groupe G' disjoint du précédent. Pour ce groupe G' , on sait qu'il existe une personne appartenant nécessairement à G qui en connaît tous les membres. Cette personne connaît alors tout le monde.

b) On divise les personnes en $n + 1$ paires disjointes, et on suppose que chaque personne connaît toutes les autres sauf celle qui est dans la même paire qu'elle. Ainsi, personne ne connaît tout le monde. Soit G un groupe de n personnes de cette assemblée. Puisqu'il y a $n + 1$ paires, c'est donc qu'il existe une paire, disons $\{A, B\}$, dont aucun des deux membres n'est dans G . Par suite, A connaît tous les membres de G , et les conditions de l'énoncé sont satisfaites.

Solution de l'exercice 12. a) Puisque f est surjective, il existe un entier $a > 0$ tel que $f(a) = 1$. Soit $b > a$ tel que $f(b)$ soit minimal. Puisque f est injective, on a $f(b) > 1$. On pose $b = a + d$, et donc $d \in \mathbb{N}^*$. Par suite, $a + 2d > a + d$, et la minimalité de b assure que $f(a + 2d) > f(b)$. Ainsi, $f(a) < f(a + d) < f(a + 2d)$, ce qui conclut.

b) La réponse est non. Plus généralement, on va prouver qu'il existe une permutation f de \mathbb{N}^* qui n'est croissante sur aucune progression arithmétique (non-constante) de longueur 4. On divise \mathbb{N}^* en intervalles deux à deux disjoints $I_k = [a_k, a_{k+1}[$, où $a_k = \frac{3^{k-1} + 1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Notons que la suite (a_k) vérifie la relation de récurrence $a_{k+1} = a_k + 3^{k-1}$. On définit maintenant la fonction f sur \mathbb{N}^* par $f(a_k + i) = a_{k+1} - i - 1$ pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{0, 1, \dots, a_{k+1} - a_k - 1\}$. Il est facile de vérifier que, pour tout k , on a $f(I_k) = I_k$ et que f est strictement décroissante sur I_k . Ainsi, f est une permutation de \mathbb{N}^* .

Par l'absurde : supposons qu'il existe $a, d \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(a) < f(a + d) < f(a + 2d) < f(a + 3d)$. Puisque f est strictement décroissante sur I_k , cela entraîne que $a, a + d, a + 2d, a + 3d$ sont dans des I_k deux à deux distincts. Il existe donc des entiers p, q, r tels que $p < q < r$ et $a \in I_p, a + d \in I_q, a + 2d \in I_r$. De plus, on a $d < a + d < a_{q+1}$ d'où $d < \frac{3^q - 1}{2}$, ce qui assure que $2d < 3^q$ et donc que $2d < 3^{r-1}$. Mais $a + d \in I_q$, donc $a + d < a_{q+1} \leq a_r$ et ainsi $a_r \leq a + 2d < a + 3d < a_r + 3^{r-1} \leq a_{r+1}$. On en déduit que $a + 3d \in I_r$, ce qui contredit que $a + 2d$ et $a + 3d$ soient dans des I_k distincts. D'où la conclusion.

Solution de l'exercice 13. Non, c'est impossible.

Les trois piles initiales contiennent chacune un nombre impair de jetons donc la première opération consiste forcément à réunir deux piles en une seule.

- ☞ Si on réunit les piles de 51 et de 49 jetons, on obtient deux piles de respectivement 100 et 5 jetons. Ces deux nombres sont des multiples de 5, et il est facile de vérifier par récurrence que toutes les configurations accessibles à partir de là ne seront constituées que de piles qui contenant chacune un nombre de jetons multiple de 5.
- ☞ Si on réunit les piles de 51 et de 5 jetons, on a la même conclusion mais pour des multiples de 7.
- ☞ Si on réunit les piles de 49 et de 5 jetons, on a la même conclusion mais pour des multiples de 3.

Ainsi, dans tous les cas, on n'obtiendra jamais une pile ne contenant qu'un seul jeton, et encore moins uniquement des piles de un jeton.

Solution de l'exercice 14. Considérons deux lignes adjacentes, disons L et L' .

On note r (resp. v) le nombre de segments rouges (resp. verts) qui relient une case de L à une case de L' . Il y a alors $n - r$ jetons rouges de L adjacents à des jetons verts de L' , $n - v$ jetons verts de L adjacents à des jetons rouges de L' . Par suite, le nombre de jetons rouges de L est $n = (n - v) + r$, ce qui conduit à $r = v$.

Cela signifie qu'entre deux lignes adjacentes quelconques, le nombre de segments rouges est égal au nombre de segments verts. On en déduit que le nombre total de segments rouges verticaux est égal au nombre total de segments verts verticaux.

La même démarche permet de prouver que le nombre total de segments rouges horizontaux est égal au nombre total de segments verts horizontaux. La conclusion en découle immédiatement.

Solution de l'exercice 15. La pièce a été visitée 99 fois.

Plus généralement, on considère un palais de $n \times n$ pièces, chacune d'entre elles ayant été visitée exactement $p \geq 1$ fois, sauf celle située au coin nord-ouest qui a été visitée exactement deux fois et celle située au coin sud-est qui a été visitée exactement x fois. On va prouver que si n est impair alors $x = p - 1$, et que si n est pair alors $x = 2p - 1$.

On commence par colorier chaque pièce alternativement en blanc ou en noir, comme un échiquier, de sorte que les deux pièces situées aux coins nord-ouest et sud-est soient noires. Notons que lorsqu'on se déplace dans le palais, on passe toujours d'une pièce blanche à une pièce noire et réciproquement.

☞ Si n est impair :

En tout, il y a $\frac{n^2+1}{2}$ pièces noires et $\frac{n^2-1}{2}$ pièces blanches. Puisque chaque pièce blanche a été visitée exactement p fois et que la personne est à chaque fois sortie d'une pièce blanche pour entrer dans une pièce noire, le nombre total de passages d'une pièce blanche à une pièce noire réalisés pendant la promenade est $p \frac{n^2-1}{2}$.

Mais, si on élimine la première entrée dans la pièce du coin nord-ouest (on vient de dehors), cela correspond au nombre total de visites de pièces noires au cours de la promenade. La pièce du coin nord-ouest n'a alors été visitée qu'une seule fois. Ce nombre de visites est donc égal à $1 + x + p(\frac{n^2+1}{2} - 2)$.

Il vient $1 + x + p(\frac{n^2+1}{2} - 2) = p \frac{n^2-1}{2}$, soit donc $x = p - 1$.

☞ Si n est pair :

Le raisonnement est le même mais avec $\frac{n^2}{2}$ pièces noires et $\frac{n^2}{2}$ pièces blanches. On arrive cette fois à $1 + x + p(\frac{n^2}{2} - 2) = p \frac{n^2}{2}$, soit donc $x = 2p - 1$.

Solution de l'exercice 16. Par l'absurde : supposons qu'un tel placement existe.

Soit 2^n la plus petite somme d'une ligne du tableau. Alors $2^n \geq 1 + 2 + \dots + k$, c.à.d.

$$2^{n+1} \geq k(k+1) > 1 \quad (\text{III.1})$$

D'autre part, puisque les autres sommes de lignes sont des puissances de 2 au moins aussi grandes, 2^n divise chacune de ces sommes. En sommant sur les lignes, on en déduit que 2^n divise la somme de tous les nombres inscrits, à savoir $1 + 2 + \dots + k^2 = \frac{k^2(k^2+1)}{2}$.

Or, si k est impair, on a $k^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ d'où $\frac{k^2(k^2+1)}{2}$ est impair, et ne peut donc être divisible par 2^n . Donc k est pair et 2^n divise $\frac{k^2}{2}$, ce qui conduit à $2^{n+1} \leq k^2$, en contradiction avec l'inégalité (III.1).

Solution de l'exercice 17. Pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, on note \mathcal{P}_i l'ensemble des nombres premiers congrus à i modulo k . Puisqu'il y a une infinité de nombres premiers et qu'au plus un est divisible par k , le principe des tiroirs assure que l'un de ces ensembles, disons \mathcal{P}_r , est infini. Soit $(x_j)_{j \geq 0}$ la suite des éléments de \mathcal{P}_r rangés dans l'ordre croissant. Pour tout entier $j \geq 1$, on a $x_j \equiv x_0 \pmod{k}$ donc le nombre $a_j = \frac{x_j - x_0}{k}$ est un entier strictement positif. La stricte croissance de la suite $(a_j)_{j \geq 1}$ découle de celle de $(x_j)_{j \geq 1}$.

On pose alors $p = x_0$. Comme, pour tout $n \geq 1$, on a $p + ka_n = x_n$, cela conclut.

Solution de l'exercice 18. Puisque $a_1 = 3$ et $a_n > a_{n-1}^2$ pour tout entier $n \geq 1$, une récurrence évidente conduit à $a_n > 2^{2^{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$.

Une autre récurrence immédiate permet d'affirmer que $2^n > n + 3$ pour tout $n \geq 3$. Combinant ces deux inégalités, on en déduit que, pour tout $n \geq 3$, on a $a_n^2 > 2^{2^n} > 2^{n+3}$, et donc $\frac{1}{4}a_n^2 > 2^{n+1}$. (1)

On prouve maintenant par récurrence que $b_n < \frac{1}{2}a_n$ pour tout $n \geq 3$:

☞ On a $a_3 = 147$ et $b_3 = 72 < \frac{1}{2}a_3$.

☞ Soit $n \geq 3$ un entier fixé pour lequel on suppose que $b_n < \frac{1}{2}a_n$. Alors

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_n^2 + 2^{n+1} \\ &< \frac{1}{4}a_n^2 + 2^{n+1} \text{ d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &< \frac{1}{2}a_n^2 \text{ d'après (1)} \\ &< \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2}a_{n+1}, \text{ ce qui prouve l'inégalité désirée au rang } n+1. \end{aligned}$$

Il en découle évidemment que $b_{2003} < a_{2003}$.

Solution de l'exercice 19. Supposons que chaque matin, deux personnes quelconques qui vivent dans un même appartement se serrent la main. On va prouver que le total nombre de poignées de mains est strictement décroissant :

Soit S le nombre de poignées de mains d'un jour donné. Supposons que $n \geq 15$ personnes habitent ce jour-là dans un même appartement surpeuplé et s'en vont chacun dans un nouvel appartement. Ces appartements sont deux à deux distincts, et y vivent déjà respectivement a_1, \dots, a_n personnes. Le nombre de poignées de mains le jour suivant est donc $S' = S - \frac{n(n-1)}{2} + (a_1 + \dots + a_n)$.

Or, en tout, il y a 119 personnes donc $a_1 + \dots + a_n \leq 119 - n \leq 104$.

Ainsi $S' \leq S - \frac{15 \times 14}{2} + 104 < S$, comme annoncé.

La suite des nombres de poignées de mains est donc une suite strictement décroissante d'entiers positifs ou nuls. Elle doit alors être finie. Or, le seul test d'arrêt est qu'il n'y ait plus d'appartement surpeuplé, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 20. Pour toute équipe X (d'un tournoi des n nations quelconque), on note respectivement $v(X)$ et $d(X)$ le nombre de victoires et de défaites de X .

Clairement, pour toute équipe X , on a $v(X) + d(X) = n - 1$.

De plus, puisqu'il n'y a pas de match nul, on a : $\sum_X v(X) = \sum_X d(X) = \frac{n(n-1)}{2}$.

a) Pour le tournoi des 6 nations : Non, c'est impossible. Par l'absurde : Supposons qu'un tel tournoi existe. Si $v(A) = 5$, c'est donc qu'elle a battu toutes les autres équipes, dont B et C . Or, de $d(B) = d(C) = 4$, il s'ensuit que c'est leur seule défaite. Pourtant, lors de leur rencontre l'une des deux a bien battu l'autre. Contradiction.

Pour le tournoi des 5 nations : Oui, un tel tournoi existe. Par exemple : A gagne contre B, C, D ; B gagne contre C, D, E ; C gagne contre D, E ; D gagne contre E ; E gagne contre A .

b) Supposons que n soit un entier ayant la propriété demandée, et on se donne un tournoi des n nations adéquat, que l'on appellera tournoi *équilibré*. Si l'équipe A gagne le tournoi des n nations avec $v(A) = d(A)$, on a donc $n = 2v(A) + 1$, ce qui prouve que n doit être impair.

Réciproquement, si $n = 2k + 1$ est impair : La façon la plus facile de représenter un tournoi équilibré revient à raisonner comme suit. Identifions les équipes A_1, \dots, A_n avec les sommets d'un n -gone régulier convexe inscrit dans un cercle Γ . Puisque n est impair, pour tout i , le diamètre de Γ passant par A_i sépare les autres sommets en deux groupes de k équipes. On considère alors le tournoi dans lequel A_i gagne contre toutes les équipes à sa gauche et perd contre toutes celles à sa droite (selon le sens direct).

c) Supposons que n soit un entier ayant la propriété demandée et donnons-nous un tournoi des n nations adéquat. Supposons de plus que A ait gagné ce tournoi et que B soit seconde avec $d(B) > v(B)$. Alors $v(B) < \frac{n-1}{2}$, et comme le classement se fait sur le nombre de victoires, c'est donc que pour toutes les autres équipes que A , on a $v(X) \leq v(B) < \frac{n-1}{2}$, ce qui assure que $v(X) < d(X)$. S'agissant d'entiers, on a donc $v(X) \leq d(X) - 1$. Mais alors :

$$\sum_X d(X) = \sum_X v(X) = v(A) + \sum_{X \neq A} v(X) \leq v(A) - (n-1) + \sum_{X \neq A} d(X)$$

d'où $d(A) \leq v(A) - (n-1) = -d(A)$. Puisque $d(A) \geq 0$, c'est donc que $d(A) = 0$. Cela signifie que A a réalisé le grand chelem. Mais alors, si on « élimine » A , il reste un tournoi à $n-1$ équipes, que gagne B

avec $d'(X) = d(X) - 1$ et $v'(X) = v(X)$ pour toutes les équipes de ce tournoi, et en particulier $d'(B) \geq v'(B)$. Le raisonnement ci-dessus conduit alors facilement à $d'(B) = v'(B)$, c.à.d. que le sous-tournoi est équilibré et, dans ces conditions, la question 2) nous permet d'affirmer que $n - 1$ est impair, c.à.d. que n est pair.

Réciproquement, si n est pair, on peut construire un tournoi adéquat en commençant par construire un tournoi équilibré avec $n - 1$ équipes. Puis à ajouter une équipe qui gagne tous ses matchs. Finalement, les entiers cherchés sont les entiers pairs.

d) Tout entier $n \geq 3$ convient. Il suffit de considérer le tournoi dont les équipes sont A_1, \dots, A_n et pour lequel l'équipe A_i a battu l'équipe A_j si et seulement si $i > j$. Dans ce cas, on a bien évidemment $v(A_i) = i - 1$, et le classement est fait sur l'ensemble des équipes sans avoir à regarder les points.

e) On commence par remarquer que si n est tel qu'il existe un tournoi des n nations pour lequel il est possible de faire le classement des trois premiers sans avoir à regarder les points sans qu'il y ait eu de grand chelem, alors $n + 1$ l'est aussi puisqu'il suffit d'ajouter au tournoi précédent une équipe qui perde tous ses matchs pour construire un tournoi adéquat des $n + 1$ nations.

On va maintenant prouver que $n = 7$ n'a pas cette propriété. Par l'absurde : Supposons qu'il existe un tel tournoi des 7 nations, dont les équipes sont A, B, C, D, E, F et G classées dans cet ordre à l'issue du tournoi. Ainsi $v(A) > v(B) > v(C) > v(D) \geq v(E) \geq v(F) \geq v(G)$. Puisqu'il n'y a pas eu de grand chelem, on a donc $v(A) \leq 5$. D'où $v(B) \leq 4, v(C) \leq 3$ et $v(D), v(E), v(F), v(G) \leq 2$. Par suite $21 = \frac{7 \times 6}{2} = \sum_X v(X) \leq 5 + 4 + 3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 20$. Contradiction.

Il reste à prouver que $n = 8$ convient. Pour cela, il suffit de considérer le tournoi suivant : A gagne contre B, C, D, E, F, G ; B gagne contre C, D, E, F, G ; C gagne contre D, E, F, G ; D gagne contre E, F, G ; E gagne contre F, G ; F gagne contre G ; G gagne contre H ; H gagne contre A, B, C . Le minimum cherché est donc $n = 8$.

f) Pour k donné, on note $f(k)$ le minimum cherché, s'il existe. D'après d) et e), on a $f(0) = 3$ et $f(1) = 8$. La remarque initiale de la question e) reste valable. Supposons $k \geq 4$ et considérons un entier n (sous réserve d'existence) pour lequel il existe un tournoi adéquat. Sans perte de généralité, on peut supposer que les trois premiers sont A, B et C dans cet ordre. On a alors $d(A) \geq k, d(B) \geq k + 1, d(C) \geq k + 2$ et $d(X) \geq k + 3$ pour chacune des $n - 3$ autres équipes du tournoi. Par suite :

$$\frac{n(n-1)}{2} = \sum_X d(X) \geq k + (k+1) + (k+2) + (n-3)(k+3)$$

d'où l'on déduit que $n^2 - (2k+7)n + 12 \geq 0$, c.à.d. $n \geq \frac{2k+7+\sqrt{4k^2+28k+1}}{2}$. Or, pour $k \geq 4$, il vient $4k^2 + 28k + 1 = (2k+5)^2 + 8k - 24 > (2k+5)^2$ et donc $n \geq \frac{2k+7+\sqrt{4k^2+28k+1}}{2} > 2k+6$. La minimalité de $f(k)$ conduit alors à $f(k) \geq 2k+7$ pour $k \geq 4$.

Réciproquement, on va construire un tournoi adéquat à $2k+7$ équipes. On note $A, B, C, D, X_1, \dots, X_{2k+3}$ les équipes, et on considère le tournoi pour lequel :

- ☞ Le sous-tournoi formé par X_1, \dots, X_{2k+3} est un sous-tournoi équilibré (et donc elles ont chacune $k+1$ défaites entre elles),
- ☞ A a perdu contre X_1, \dots, X_k et gagné contre les autres X_i ,
- ☞ B a perdu contre X_{k+1}, \dots, X_{2k} et gagné contre les autres X_i ,
- ☞ C a perdu contre $X_{2k+1}, X_{2k+2}, X_{2k+3}, X_1, \dots, X_{k-3}$ et gagné contre les autres X_i ,
- ☞ D a perdu contre X_{k-2}, \dots, X_{2k-3} et gagné contre les autres X_i ,

et, de plus A a battu B, C, D , B a battu C, D et C a battu D . Il est facile de vérifier qu'alors $d(A) = k, d(B) = k + 1, d(C) = k + 2, d(D) = d(X_i) = k + 3$ pour $i = 1, \dots, 2k - 3$ et que $d(X_i) = k + 4$ pour $i = 2k - 2, \dots, 2k + 3$, ce qui montre que le tournoi est bien du type souhaité. Ainsi $f(k) = 2k + 7$ pour $k \geq 4$.

Pour $k \in \{2, 3\}$, la première partie du raisonnement ci-dessus s'applique mot à mot pour conduire à $f(k) \geq \frac{2k+7+\sqrt{4k^2+28k+1}}{2}$ et donc à $f(2) \geq 10$ et $f(3) \geq 12$. Réciproquement, on considère le tournoi des 10 nations suivant :

- ☞ Les équipes X_1, \dots, X_7 forment un sous-tournoi équilibré (ce qui leur donne déjà à chacune 3 défaites),
- ☞ A a perdu contre X_1 et X_2 et gagné contre les autres X_i ,
- ☞ B a perdu contre X_3 et X_4 et gagné contre les autres X_i ,
- ☞ C a perdu contre X_5 et X_6 et gagné contre les autres X_i

et, de plus A a battu B et C et B a battu C. Ainsi, on a $d(A) = 2$, $d(B) = 3$, $d(C) = 4$ et $d(X_i) \geq 5$ pour tout i . Par conséquent, on a $f(2) \leq 10$ et donc $f(2) = 10$.

On considère maintenant le tournoi des 12 nations suivant :

- ☞ Les équipes X_1, \dots, X_9 forment un sous-tournoi équilibré (ce qui leur donne déjà à chacune 4 défaites),
- ☞ A a perdu contre X_1, X_2 et X_3 et gagné contre les autres X_i ,
- ☞ B a perdu contre X_4, X_5 et X_6 et gagné contre les autres X_i ,
- ☞ C a perdu contre X_7, X_8 et X_9 et gagné contre les autres X_i ,

et, de plus A a battu B et C et B a battu C. Ainsi, on a $d(A) = 3$, $d(B) = 4$, $d(C) = 5$ et $d(X_i) = 6$ pour tout i . Par conséquent, on a $f(3) \leq 12$ et donc $f(3) = 12$.

Finalement, on a $f(0) = 3$, $f(k) = 2k + 6$ pour $k = 1, 2, 3$ et $f(k) = 2k + 7$ pour $k \geq 4$.

Solution de l'exercice 21. On vérifie facilement que la quantité $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$ est invariante par les opérations autorisées. Or $f(1, 21, 42) = 316$ et $f(5, 13, 40) = 224$, d'où l'impossibilité.

Remarque : cet invariant ne sort pas de nulle part et peut se trouver en cherchant une quantité symétrique en a, b, c qui, pour a et b fixés, a pour racines c et $2a + 2b - c$. On regarde du côté des expressions du second degré, et celle que l'on cherche doit être de la forme $c^2 - (2a + 2b)c + r$, où r est indépendant de c . On détermine ensuite r en utilisant la symétrie par rapport aux variables.

Stratégie de base (groupe B)

Solution de l'exercice 22. a) D'après le principe des tiroirs, il y a au moins deux entiers qui se terminent par les mêmes deux derniers chiffres. Leur différence est alors un multiple de 100.

b) Considérons les tiroirs étiquetés de la façon suivante :

$$(000), (001, 999), (002, 998), (003, 997), \dots, (498, 502), (499, 501), (500)$$

et plaçons les 502 entiers dans ces tiroirs en fonction de leurs trois derniers chiffres. Comme il n'y a que 501 tiroirs, au moins l'un des tiroirs contient deux entiers. Si c'est le tiroir (000) ou (500), de même que dans la question a), on conclut que la différence des deux entiers est multiple de 1000. S'il s'agit d'un autre tiroir, on doit distinguer deux cas : soit les entiers se terminent par les trois mêmes chiffres et alors leur différence est multiple de 1000, soit ils se terminent chacun par un des nombres étiquettant le tiroir et c'est alors leur somme qui est multiple de 1000.

c) Pour tout $i \leq n$, notons $S_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. On a l'alternative suivante :

- ☞ soit il existe des indices $i < j$ tels que $S_i \equiv S_j \pmod{n}$, et alors la différence $S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \dots + a_j$ est multiple de n
- ☞ soit les S_i atteignent tous les restes modulo n , et en particulier 0 est atteint ce qui donne une somme multiple de n .

Solution de l'exercice 23. Notons n le nombre de personnes de l'ensemble. Le nombre de connaissance de chaque personne est compris entre 0 et $n - 1$. Il y a donc n possibilités. Comme il y a également n personnes, si la conclusion de l'énoncé n'est pas valide, c'est que chacune des n possibilités

apparaît effectivement. En particulier, il y a une personne qui connaît tout le monde et une autre qui ne connaît personne, mais ceci est manifestement impossible puisque ces deux personnes doivent, oui ou non, se connaître.

Solution de l'exercice 24. Soit (x_0, y_0) un point sur lequel la fonction f atteint son minimum, disons m . (Il existe bien puisque f est supposée à valeurs dans \mathbb{N} .) L'équation fonctionnelle implique alors immédiatement que $f(x_0 - 1, y_0) = f(x_0, y_0 + 1) = f(x_0 + 1, y_0) = f(x_0, y_0 - 1) = m$. En effet, puisque m est le minimum, ils sont tous plus grands ou égaux à m et si l'un d'eux était strictement plus grand, un autre devrait être strictement plus petit pour satisfaire l'égalité. En propageant le raisonnement, on obtient bien la constance de f .

Solution de l'exercice 25. Nous allons montrer par récurrence que $a_n = n$ pour tout n . Pour l'initialisation, on applique la condition de l'énoncé avec $n = 1$ qui donne $a_1^3 = a_1^2$ et donc bien $a_1 = 1$ puisque a_1 est strictement positif donc en particulier non nul.

Supposons maintenant que $a_i = i$ pour tout $i < n$ et montrons que $a_n = n$. On a par hypothèse :

$$(1 + 2 + \dots + n - 1 + a_n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + (n - 1)^3 + a_n^3$$

ce qui après simplification donne l'équation $a_n^2 = a_n + n(n - 1)$. Cette dernière se factorise sous la forme $(a_n - n)(a_n + n - 1) = 0$ et a donc pour unique solution positive $a_n = n$, comme voulu.

Solution de l'exercice 26. Pour que l'hypothèse de l'énoncé soit vérifiée avec $k = 1$, on doit nécessairement avoir $a_1 = 1$ et pour qu'elle soit vérifiée avec $k = 3$, on doit avoir $a_2 = 2$ ou 3 . On a donc bien $a_n \leq n^2$ pour $n = 1$ et $n = 2$.

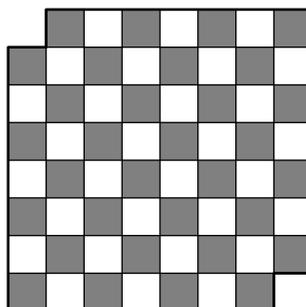
Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe un rang $n > 2$ tel que $a_n > n^2$. L'hypothèse de l'énoncé assure que les entiers compris entre 1 et n^2 s'obtiennent comme l'un des nombres a_1, \dots, a_{n-1} ou comme une somme de deux des nombres précédents. Or, on peut former exactement $\frac{n(n-1)}{2}$ additions différentes (en ne tenant pas compte de l'ordre) avec les nombres précédents, ce qui assure que l'on obtiendra au maximum $\frac{n(n-1)}{2}$ résultats différents. Ainsi, doit-on avoir :

$$n - 1 + \frac{n(n-1)}{2} \geq n^2$$

ce qui constitue une contradiction.

Solution de l'exercice 27. On remarque que chaque déchirure augmente le nombre de morceaux de 3 . Comme il y a un seul morceau au début, le nombre de morceaux est toujours de la forme $3k + 1$. Comme 2006 n'est pas un multiple de 3 , 2007 n'est pas de cette forme, et il est donc impossible qu'il reste à un moment 2007 petits bouts de papier.

Solution de l'exercice 28. Sur le coloriage suivant :



chaque domino recouvre une case noire et une case blanche. La pavage est donc impossible puisqu'il y a 32 cases noires et seulement 30 cases blanches.

Solution de l'exercice 29. Nous allons montrer que le pavage est possible si, et seulement si x et y sont tous les deux multiples de n . Le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, on considère le coloriage du damier en n couleurs c_1, \dots, c_n obtenu en continuant le motif suivant :

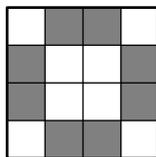
$$\begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_n & c_1 \\ c_3 & c_4 & c_5 & \cdots & c_1 & c_2 \\ \vdots & & & & \vdots & \end{array}$$

Alors une brique, quelle que soit la façon dont elle est placée, recouvre exactement une case de chaque couleur. Pour conclure, il suffit de prouver que si x ou y n'est pas un multiple de n , alors une couleur apparaît plus de fois qu'une autre.

Si x est le nombre de lignes et si $x \geq n$, on peut retirer pour faire le décompte les n premières lignes puisque sur ces lignes chaque couleur apparaît autant de fois (en l'occurrence y fois chacune). En répétant au besoin l'opération, on peut supposer que $x < n$. Par ailleurs comme x n'est pas multiple de n par hypothèse, on a $x > 0$. En appliquant le même raisonnement sur les colonnes, on peut également supposer $0 < y < n$. Dans ces conditions, la couleur c_y apparaît une et une seule fois sur chaque ligne, contrairement à la couleur c_{y+1} qui n'apparaît pas sur la première ligne et bel et bien une et une seule fois sur les autres. Au final c_y apparaît une fois de plus que c_{y+1} , et la conclusion s'ensuit.

Solution de l'exercice 30. Chaque opération retire du sac soit zéro, soit deux boules blanches. Ainsi la parité du nombre de boules blanches reste inchangée et comme il y en a 2007 au début, il y en restera toujours au moins une. Il en résulte simultanément qu'il reste bel et bien une boule à la fin de la manipulation et que celle-ci est blanche.

Solution de l'exercice 31. La réponse est non. En effet, l'astuce consiste à ne se concentrer que sur les cases grisées sur le schéma ci-dessous, et à remarquer que chaque opération change le signe d'un nombre pair de ces cases.



Ainsi le nombre de + écrits dans les cases grisées garde-t-il toujours la même parité. Dans la configuration initiale ce nombre vaut 5 et donc est impair, alors que dans la configuration que l'on veut atteindre il doit valoir 6 et donc être pair.

Solution de l'exercice 32. À chaque étape, un et un seul des quatre sommets du carré « central » de taille 4×4 augmente d'une unité. Ainsi, après 2003 étapes, les quatre sommets de ce carré auront augmenté globalement de 2003 unités, et donc leur somme vaudra 2007 comme voulu.

Solution de l'exercice 33. Un tel coloriage existe. Pour le construire, une possibilité consiste à énumérer tous les couples d'entiers naturels (q, r) en une suite (q_k, r_k) et à construire le coloriage par récurrence. Au commencement, aucun entier n'est colorié et à chaque étape on colorie au plus deux entiers de telle façon qu'à chaque pas de la récurrence seulement un nombre fini d'entiers est colorié. Précisément, à la k -ième étape de la récurrence, on considère deux entiers qui apparaissent dans la

suite $q_k n + r_n$ et on colorie un de ces entiers en rouge et l'autre en bleu. S'il reste à la fin de l'opération des entiers non encore coloriés, on les colorie comme on le souhaite, par exemple tous en rouge.

Alors, aucune des suite $q_k n + r_n$ n'est monochrome puisque l'on a explicitement mis un entier de chaque couleur dans cette suite à la k -ième étape. Par ailleurs comme tous les couples (q, r) ont été énumérées, toutes les suites arithmétiques apparaissent parmi les suites précédentes. Ainsi le coloriage remplit bien les conditions demandées.

Solution de l'exercice 34. Oui. Fixons O un point quelconque du plan, puis colorions le point M du plan en bleu (resp. en rouge) si la distance OM est rationnelle (resp. irrationnelle). Si maintenant M parcourt un segment $[AB]$ non réduit à un point, la distance OM varie dans un intervalle non trivial et donc passe au moins une fois par un nombre rationnel et un autre fois par un nombre irrationnel.

Solution de l'exercice 35. Considérons un repère orthonormé orienté de telle façon que les centres des cases de l'échiquier aient pour coordonnées (i, j) avec $1 \leq i, j \leq 8$. Soit (x, y) les coordonnées du centre de la case choisie. La question de l'énoncé revient à montrer que la double somme :

$$S = \sum_{i=1}^8 \sum_{j=1}^8 (-1)^{i+j} [(x-i)^2 + (y-j)^2]$$

s'annule. Or, on a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^8 (-1)^{i+j} (x-i)^2 + \sum_{i=1}^8 (-1)^{i+j} (y-j)^2 \\ &= \sum_{i=1}^8 (-1)^i (x-i)^2 \sum_{j=1}^8 (-1)^j + \sum_{i=1}^8 (-1)^i \sum_{j=1}^8 (-1)^j (y-j)^2 \end{aligned}$$

et il est clair sur cette dernière écriture que S s'annule puisque $\sum_{i=1}^8 (-1)^i = \sum_{j=1}^8 (-1)^j = 0$.

Solution de l'exercice 36. a) Tous les entiers $k \geq 3$ conviennent. Nous le montrons par récurrence. Pour $k = 3$, il suffit de choisir p, q et r des nombres premiers distincts et de considérer l'ensemble $\{pq, qr, pr\}$. Passons et l'hérédité et supposons donné un ensemble $\{a_1, \dots, a_k\}$ qui satisfait la condition de l'énoncé. Soient p_1, \dots, p_k des nombres premiers deux à deux distincts qui ne sont facteurs d'aucun des a_i . (Ils existent manifestement puisque l'ensemble des nombres premiers est infini.) Posons $b_i = a_i p_i$ pour $1 \leq i \leq k$ et $b_{k+1} = p_1 p_2 \dots p_k$. J'affirme que l'ensemble $B = \{b_1, \dots, b_{k+1}\}$ de cardinal $k+1$ satisfait encore à la condition de l'énoncé. En effet, si b_i et b_j sont deux nombres de cet ensemble, on a l'alternative suivantes : soit les indices i et j sont inférieurs ou égaux à k et alors $\text{PGCD}(b_i, b_j) = \text{PGCD}(a_i, a_j) > 1$ par hypothèse de récurrence, soit $j = k$ et alors $\text{PGCD}(b_i, b_k) = p_i > 1$. De même, si b_i, b_j et b_ℓ sont trois éléments de B , alors soit les trois indices i, j et ℓ sont inférieurs ou égaux à k , et alors $\text{PGCD}(b_i, b_j, b_\ell) = \text{PGCD}(a_i, a_j, a_\ell) = 1$, soit on a par exemple $\ell = k$ et alors $\text{PGCD}(b_i, b_j, b_k) = \text{PGCD}(p_i, b_j) = 1$.

b) Non. Pour le prouver on raisonne par l'absurde en supposant que l'ensemble $\{a_1, a_2, \dots\}$ convient. Alors pour tout $i \geq 2$, il existe un nombre premier p_i divisant à la fois a_1 et a_i . Les p_i sont donc tous parmi les diviseurs premiers de a_1 , ainsi ils ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Par le principe des tiroirs, il existe deux indices i et j (différents) tels que $p_i = p_j = p$. Mais alors p divise à la fois a_1, a_i et a_j , ce qui prouve que ces trois nombres ne sont pas premiers entre eux. C'est une contradiction.

Solution de l'exercice 37. On procède par récurrence sur n . Lorsqu'il n'y a qu'une droite, c'est évident puisqu'il suffit de colorier un demi-plan en bleu et l'autre en rouge. Supposons maintenant qu'il y ait $n+1$ droites. Isolons les n premières droites et considérons un coloriage convenable pour celles-ci. À partir de cela, on obtient un coloriage convenable pour les $n+1$ droites en inversant toutes les couleurs dans un des deux demi-plans délimité par la dernière droite.

Solution de l'exercice 38. On raisonne par récurrence. Lorsque $n = 2$, le sous-ensemble doit être de cardinal 4 et donc nécessairement égal à $\{1, 2, 3, 4\}$. Ainsi on a bien une solution puisque par exemple $1 + 2 = 3$.

Supposons à présent que l'on retienne $n + 3$ entiers parmi $\{1, \dots, 2n + 2\}$. Si parmi ces entiers retenus, il y en a déjà $n + 2$ plus petits ou égaux à $2n$, l'hypothèse de récurrence permet de conclure directement. Sinon, c'est que l'on a retenu $2n + 1$ et $2n + 2$, et qu'il reste exactement $n + 1$ entiers choisis entre 1 et $2n$. D'après le principe des tiroirs, les deux entiers d'un des ensembles $\{1, 2n\}, \{2, 2n - 1\}, \dots, \{n, n + 1\}$ ont été choisis. La somme de ces deux entiers fait alors $2n + 1$ et on a bien trouvé une solution à l'équation.

Solution de l'exercice 39. Montrons dans un premier temps que tout entier $n \geq 5$ est académique. Pour cela, nous cherchons la partie \mathcal{P} sous la forme particulière $\mathcal{P} = \{1, a, b\}$ avec $1 < a < b \leq n$. Le produit des éléments de \mathcal{P} est évidemment ab , alors que la somme des éléments de \mathcal{P} vaut $\frac{n(n+1)}{2} - a - b - 1$. Ainsi, on est ramené à résoudre l'équation :

$$ab + a + b + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

qui se factorise sous la forme $(a + 1)(b + 1) = \frac{n(n+1)}{2}$. Si n est pair, il suffit de choisir $a = \frac{n}{2} - 1$ et $b = n$. Si, au contraire, n est impair, on prend $a = \frac{n-1}{2}$ et $b = n - 1$. Dans les deux cas, on vérifie que l'inégalité $1 < a < b \leq n$ est bien satisfaite puisque $n \geq 5$.

Il reste à traiter les cas $n = 2, 3, 4$. Il est passablement clair que 2 n'est pas académique. Par contre, 3 l'est puisque l'on peut choisir $\mathcal{S} = \{1, 2\}$ et $\mathcal{P} = \{3\}$. Finalement, en testant toutes les possibilités, on obtient que 4 n'est pas non plus académique.

Solution de l'exercice 40. Appelons A l'un des six points. Il part de A cinq segments coloriés. D'après le principe des tiroirs, au moins trois d'entre eux ont la même couleur, disons rouge. Notons B, C et D les extrémités de ces segments. De deux choses l'une : soit les trois segments $[BC], [CD]$ et $[BD]$ sont rouges et alors le triangle BCD est monochromatique (rouge), soit l'un des segments précédents disons $[BC]$ est bleu et alors c'est le triangle ABC qui est monochromatique (bleu).

Solution de l'exercice 41. On colorie en rouge tous les segments qui sont les plus petits côtés d'un triangle et en bleu les autres. D'après l'exercice précédent, il y a dans cette coloration un triangle monochromatique. Le plus petit côté de ce triangle étant bleu, tout le triangle est bleu. Le plus grand côté de ce triangle maintenant est donc à la fois un plus grand côté de triangle et un plus petit côté de triangle (puisqu'il est colorié en bleu).

Solution de l'exercice 42. On considère la seconde précédente le premier instant où un jeton retourne à sa place d'origine. Appelons J ce jeton. À cette seconde, nous affirmons qu'aucun jeton n'est dans sa position initiale. En effet, déjà, J ne peut être dans sa position initiale puisqu'il va y revenir au coup suivant. Les autres jetons, quant à eux, ne sont pas encore revenus à leur position initiale mais ont nécessairement été déplacés puisque J a parcouru toutes les cases de l'échiquier, et donc chacune des positions initiales.

Solution de l'exercice 43. On raisonne par l'absurde en supposant que n'importe quelle sphère de rayon 1 contient au plus n points marqués. On considère un point quelconque parmi les $mn + 1$ marqués et appelons-le A_1 . Par notre hypothèse absurde, la sphère de centre A_1 et de rayon 1 ne contient pas plus de n points. À l'extérieur de cette sphère, il reste donc au moins $(m - 1)n + 1$ points. Parmi ceux-là, on en choisit un que l'on appelle A_2 et on recommence le même raisonnement : la sphère de centre A_2 et de rayon 1 contient au plus n points, ce qui entraîne qu'à l'extérieurs des sphères de centre A_1 et A_2 , il reste au moins $(m - 2)n + 1$ points.

Ainsi de suite, on construit une suite de points marqués A_1, \dots, A_m, A_{m+1} en s'arrangeant pour que chaque A_i soit à l'extérieur des sphères de centre A_j et de rayon 1 pour $j < i$. Autrement dit, tous

les A_i sont deux à deux à distance au moins 1, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé et résout par là-même l'exercice.

Solution de l'exercice 44. Soit k le nombre d'échanges maximum qu'une mathématicien a eu avec les mathématiciens d'un même pays. Appelons Xavier cette personne, France le pays d'origine de Xavier, Japon le pays avec lequel Xavier a eu k échange et Vietnam le troisième pays. Xavier a donc eu des échanges avec k mathématiciens japonais et au moins $n + 1 - k$ échanges avec des mathématiciens vietnamiens. On a bien entendu $k \leq n$ et donc $n + 1 - k \geq 1$, et également $k \geq 1$. Isolons un mathématicien japonais qui a eu un échange avec Xavier et appelons-le Shin. Supposons par l'absurde que Shin n'ait eu aucun échange avec $n + 1 - k$ mathématiciens vietnamiens parmi ceux avec lesquels Xavier a discuté. Comme Shin a eu en tout au moins $n + 1$ échanges, c'est qu'il a parlé avec au moins $k + 1$ mathématiciens français. Ce qui contredit la maximalité de k . Ainsi Shin et Xavier ont eu un échange avec un mathématicien vietnamien commun, et cette remarque permet de former le triangle demandé par l'énoncé.

Solution de l'exercice 45. Un seul des triangles du pavage est acutangle. En effet, la remarque fondamentale consiste à dire que les triangles acutangles se reconnaissent comme ceux qui possèdent comme point intérieur le centre de leur cercle circonscrit. Ici, tous les triangles du pavage ont même cercle circonscrit, à savoir le cercle circonscrit au polygone régulier. Il est alors évident que le centre de ce cercle commun est dans l'intérieur d'un unique triangle. (Il se pourrait *a priori* que le centre soit situé sur un côté qui serait commun à deux triangles, mais en réalité cela ne peut se produire puisque les côtés du triangle sont les diagonales du polygone régulier, et celles-ci ne passent pas par le centre du cercle puisque le polygone a un nombre impair de côtés.)

Solution de l'exercice 46. a) La somme des deux entiers écrits sur une carte est toujours impaire, puisque pour l'obtenir on additionne deux entiers consécutifs. Ainsi, lorsque l'on somme tous les entiers écrits sur 21 cartes, on obtient encore un nombre impair. Cela ne peut donc pas être 2004.

b) L'idée de base est analogue sauf qu'il faut à présent regarder modulo 4. Remarquons tout d'abord que le nombre 1 apparaît nécessairement sur la même carte que 2. Mais alors, 3 apparaît forcément avec 4 et ainsi de suite. Ainsi une carte comporte les nombres $2n$ et $2n - 1$ pour un certain entier n . Leur somme $4n - 1$ est congrue à -1 modulo 4. Il s'ensuit que la somme que devrait obtenir Alice est congrue à -21 modulo 4, ce qui n'est pas le cas de 2005.

c) Si Bob ne s'était pas trompé, la somme des cartes ramassées par Alice et Bob serait égale à $2003 + 1396 = 3399$. Or à eux deux, ils ont ramassé 41 cartes et donc doivent obtenir une somme supérieure à :

$$(1 + 2) + (3 + 4) + \dots + (79 + 80) + (81 + 82) = 3403$$

ce qui constitue une contradiction.

Solution de l'exercice 47. Considérons un polygone régulier à 12 côtés inscrit dans le cercle. Ses sommets se répartissent entre quatre triplets, chacun d'eux formant les sommets d'un triangle équilatéral. Ainsi, d'après l'hypothèse de l'énoncé, exactement 8 des 12 sommets du polygone sont jaunes. Par ailleurs, on peut également répartir les 12 sommets en trois quadruplets qui sont les sommets de carrés. D'après le principe des tiroirs, au moins un de ces quadruplets regroupe trois points jaunes, ce qui résout la question.

Solution de l'exercice 48. Nous allons montrer par récurrence que le résultat est vrai pour un nombre n impair de personnes. Pour $n = 1$ c'est évident puisque personne ne tire. Supposons maintenant que l'on ait $n + 2$ personnes, pour n un entier impair. Les deux qui sont les plus proches disons Alice et Bob se tirent dessus mutuellement, tandis que les n personnes restantes tirent soit sur Alice, soit sur Bob, soit sur la personne sur laquelle elles auraient tiré si Alice et Bob ne participaient au jeu. Ainsi, toute personne restant sèche si Alice et Bob ne jouent pas n'est pas non plus mouillée lorsque Alice et Bob participent. À ce stade, l'hypothèse de récurrence termine l'exercice.

Solution de l'exercice 49. On attribue au point de coordonnée (x, y) le poids 2^{-x-y} . On remarque alors qu'une opération ne modifie la somme des poids des points occupés par un jeton. Au début, celui-ci vaut $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2$. Par contre dans une configuration où les trois points $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(0, 1)$ sont libérés, le poids est strictement majoré par :

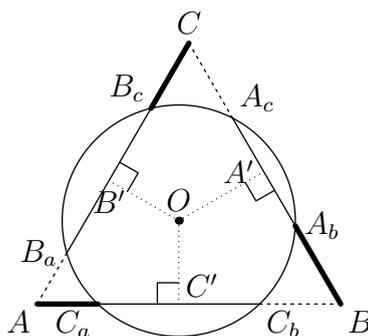
$$-2 + \sum_{x,y \geq 0} 2^{-x-y} = -2 + \sum_{x \geq 0} 2^{-x} \sum_{y \geq 0} 2^{-y} = -2 + 2 \times 2 = 2$$

ce qui démontre l'impossibilité.

Géométrie

Solution de l'exercice 50 (un généreux contributeur). Sur la figure suivante, la différence entre les deux distances est aussi la différence $(AB' + BC' + CA') - (CB' + BA' + AC')$ où on note A', B', C' les projetés du centre du cercle. Notons $O_1 = O, O_2$, et O_3 , les sommets du triangle équilatéral de même centre Ω que ABC . Grâce aux rotations d'un tiers de tour autour de Ω , on voit que si H_1, H_2 et H_3 sont les projetés des O_i sur $[AB]$, la différence recherchée est $(AH_1 + AH_2 + AH_3) - (BH_1 + BH_2 + BH_3)$.

Maintenant, si I est le milieu de $[AB]$, on a en fait $AH_1 + AH_2 + AH_3 = BH_1 + BH_2 + BH_3 = 3AI$.



Solution de l'exercice 51. L'aire de ABC est égale à celle de $OA'B'$, et ainsi de suite pour les trois autres triangles analogues.

Solution de l'exercice 52. Montrons que LMN et OAC sont semblables. Le triangle OAC est isocèle avec pour angles à la base $\pi - \beta$. D'autre part, l'arc \widehat{MN} vaut $\widehat{AN} + \widehat{MC} - \widehat{AC} = \gamma + \alpha - (\pi - 2\beta) = \beta$, d'où $\widehat{NKM} = \widehat{MLN} = 2\beta$.

La similitude qui envoie BMN sur BCA envoie donc L sur O , et L est sur l'isogonale de BO , qui est la hauteur issue de B .

Solution de l'exercice 53. Soit \vec{u} le vecteur porté par D , de longueur a (et de sens arbitraire). Soit Γ' l'image de Γ par la translation de vecteur \vec{u} . On appelle A et B les intersections de Γ et Γ' . La droite Δ parallèle à D passant par A répond à l'énoncé. En effet la translation de vecteur $-\vec{u}$ envoie le point A sur un point C qui, par construction de A , appartient à Γ et est tel que $AC = a$.

Solution de l'exercice 54. Fixons un point A_1 de D_1 . Notons r la rotation de centre A_1 et d'angle $+\frac{\pi}{3}$. Pour que $A_1A_2A_3$ soit un triangle équilatéral direct il suffit que $A_3 = r(A_2)$. Or on veut que les points A_2 et A_3 appartiennent respectivement à D_2 et D_3 , donc A_3 doit appartenir à l'intersection des droites $r(D_2)$ et D_3 . Ces droites se coupent en un unique point, on a donc A_3 et on trouve A_2 en appliquant à A_3 la rotation $-r$.

Solution de l'exercice 55. L'idée est de reporter les longueurs BM et CM sur la droite (AM) . La rotation de centre B et d'angle 60° envoie le point M sur un point M' de la droite (AM) , situé entre A et

M. Le triangle BMM' est équilatéral, donc on a $BM = MM'$. Or la même rotation envoie C en A , donc on a aussi $CM = M'A$. Or on a $MM' + M'A = AM$, d'où $AM = BM + CM$.

Solution de l'exercice 56. On construit d'abord un carré $BCDE$ extérieurement au côté $[BC]$ du triangle. Soient D' et E' les intersections de (AD) et (AE) avec le côté $[BC]$. Soit h l'homothétie de centre A envoyant D en D' , elle envoie de même E en E' . Soit $B'C'D'E'$ l'image de $BCDE$ par h . Par construction il s'agit d'un carré. Or les points A, B, B' sont alignés, tout comme les points A, C, C' , donc le carré $B'C'D'E'$ est le carré voulu.

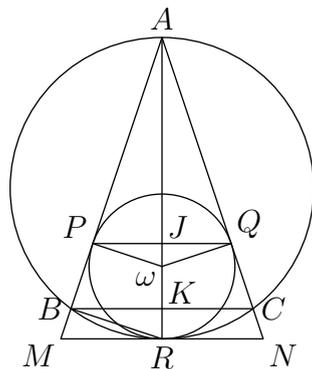
Solution de l'exercice 57. La composée de deux rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$, donc la composée de 3 rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est la composée d'une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$ et d'une rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$, donc c'est une translation. En particulier la composée des trois rotations successives décrites autour des points A_0, A_1, A_2 est une translation. Soit \vec{u} le vecteur de cette translation, on a alors $\vec{u} = \overrightarrow{P_0P_3} = \overrightarrow{P_3P_6} = \dots = \overrightarrow{P_{2004}P_{2007}}$. Donc si $P_0 = P_{2007}$, alors \vec{u} est le vecteur nul, et donc l'image de tout point du plan après les trois premières rotations est ce même point. En particulier pour A_0 , après la première rotation il est envoyé en A_0 , après la seconde il est envoyé en un certain point B , et après la troisième rotation il retourne en A_0 . Comme on a $\widehat{A_0A_1B} = \widehat{BA_2A_0} = \frac{2\pi}{3}$ et $A_0A_1 = A_1B, BA_2 = A_2A_0$, alors les quatre points A_0, A_1, B, A_2 forment un losange dont l'angle en A_1 et A_2 vaut $\frac{2\pi}{3}$, donc l'angle en A_0 vaut $\frac{\pi}{3}$, et le triangle $A_0A_1A_2$ est équilatéral.

Solution de l'exercice 58. Appelons par exemple Γ_1, Γ_2 et Γ_3 les trois cercles que l'on a à considérer et r_1, r_2 et r_3 leur rayon respectif. On va supposer en outre que ces trois rayons sont deux à deux distincts afin que les tangentes dont on doit prendre l'intersection aient bien un point commun.

Appelons maintenant A_{12} le point d'intersection des tangentes extérieures à Γ_1 et Γ_2 . Et définissons de même A_{23} et A_{31} . On a vu, dans l'exercice 4, que A_{12} était le centre de l'unique homothétie de rapport $\frac{r_2}{r_1}$ qui transformait Γ_1 en Γ_2 . Appelons h_{12} cette homothétie et définissons de façon analogue h_{23} et h_{31} .

Ce que l'on a dit précédemment prouve directement que $h_{23} \circ h_{12} = h_{31}^{-1}$. Il s'agit donc en fait de prouver un fait très général : la composée des homothéties de centre A et B qui est encore une homothétie a son centre sur la droite (AB) . Mais pour cela, on regarde l'image d'un point M de la droite (AB) ; il est envoyée par la composée sur un point M' appartenant encore à (AB) . Ainsi la droite (AB) reste globalement invariante par l'homothétie composée ; cela prouve que le centre de cette homothétie est bien situé sur cette droite.

Solution de l'exercice 59.



On remarque d'abord qu'il y a beaucoup d'angles droits sur la figure. Il y a les angles $\widehat{AP\omega}$, $\widehat{AQ\omega}$, \widehat{PJA} et \widehat{BKA} . Mais il y a aussi l'angle \widehat{RBA} , le triangle RBA étant inscrit dans un demi-cercle. On utilise alors deux fois le théorème de Thalès qui fournit les égalités :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{A\omega}{AR} = \frac{AJ}{AK}.$$

On en déduit directement l'égalité de l'énoncé.

Pour la seconde question, on introduit l'homothétie h de centre A qui envoie K sur R . On note M et N les images respectives de B et de C par h . La droite (MN) est parallèle à (BC) et donc perpendiculaire à (AR) . Ainsi le cercle γ est le cercle inscrit du triangle AMN . Par h^{-1} ce cercle se transforme en un cercle de centre J étant donné l'égalité des rapports démontrée précédemment, qui est évidemment le cercle inscrit du triangle ABC .

Solution de l'exercice 60. Montrons la première égalité, la seconde s'en déduit en échangeant les rôles de M et N . Soit M' le point diamétralement opposé à M sur le cercle Γ . Le triangle MAM' est rectangle en A et O est le milieu de son hypoténuse. On en déduit l'égalité $(MA, MM') = (OA, OM')/2$. Du triangle MBM' on déduit l'égalité $(MB, MM') = (OB, OM')/2$. La somme des deux donne $(MA, MB) = (OA, OB)/2$ comme voulu.

Solution de l'exercice 61. Soit T l'intersection des cercles circonscrits aux triangles ARQ et BPR . Par colinéarité des points on a

$$\widehat{TQA} = \pi - \widehat{CQT}, \quad \widehat{TRB} = \pi - \widehat{ART}, \quad \widehat{TPC} = \pi - \widehat{BPT}.$$

Par cocyclicité on a

$$\widehat{TQA} = \pi - \widehat{ART}, \quad \widehat{TRB} = \pi - \widehat{BPT}.$$

On déduit $\widehat{TPC} = \pi - \widehat{CGT}$, par conséquent les quatre points C, P, T, Q sont cocycliques, donc T appartient au cercle circonscrit au triangle CQP .

Solution de l'exercice 62. Soit E l'unique point du plan tel que les triangles ABE et ADC soient directement semblables (c'est-à-dire qu'il existe une similitude directe envoyant ABE sur ADC). On a $EB/CD = AB/AD$, d'où $BE = AB \cdot CD/AD$. D'autre part on a $\widehat{EAC} = \widehat{BAD}$ et $AE/AB = AC/AD$, donc les triangles ACE et ADB sont semblables, d'où $CE = AC \cdot BD/AD$. D'après l'inégalité triangulaire dans le triangle BCE on a $CE \leq CB + BE$ avec égalité si et seulement si les points C, B, E sont alignés dans cet ordre. En remplaçant BE et CE par les valeurs obtenues, on trouve l'inégalité de l'énoncé. L'égalité a lieu si et seulement si on a $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{ABE} = \pi - \widehat{ADC}$, donc si et seulement si les points A, B, C, D sont cocycliques dans cet ordre.

Solution de l'exercice 63. Soit une autre droite passant par P et coupant le cercle en C et D . On a

$$\widehat{PAC} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = -\widehat{PDB}.$$

Les triangles PAC et PDB sont donc semblables (et d'orientations opposées), d'où $PA/PD = PC/PB$, soit $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Solution de l'exercice 64. Soient R_1, R_2 les rayons respectifs des cercles Γ_1, Γ_2 . Soit P un point du plan quelconque et Δ_1 une tangente à Γ_1 passant par P et soit T son point de contact avec Γ_1 . D'après le théorème de Pythagore, la puissance de P par rapport à Γ_1 vaut $PT^2 = PO_1^2 - R_1^2$.

On en déduit que l'ensemble des points P du plan ayant même puissance par rapport aux cercles Γ_1, Γ_2 est l'ensemble des points vérifiant $PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$, soit $PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2$. Par le théorème de Pythagore, l'ensemble des tels points P est une droite perpendiculaire à l'axe (O_1O_2) appelé *axe radical* des deux cercles Γ_1 et Γ_2 .

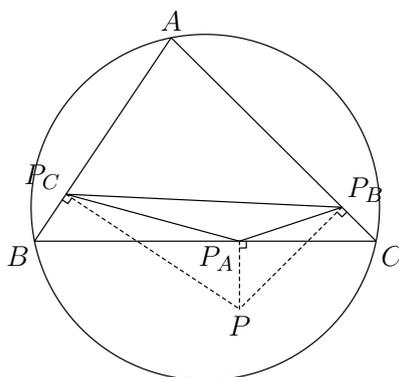
Remarquons que si les deux cercles se coupent en deux points A et B , alors leur axe radical est la droite (AB) . Si les deux cercles sont tangents en un point A , alors leur axe radical est la tangente commune qui les sépare.

Solution de l'exercice 65. Le point P est situé sur l'axe radical des deux cercles, donc il a même puissance par rapport aux deux cercles. Or sa puissance par rapport au premier cercle vaut PC^2 , et par rapport au second PD^2 , d'où $PC = PD$.

Solution de l'exercice 66. Un point appartenant à deux axes radicaux au moins a même puissance par rapport aux trois cercles, donc il appartient au troisième axe. Donc soit Δ_1 et Δ_2 sont confondus et le sont donc avec Δ_3 , soit ils ont un seul point d'intersection et ils coupent donc Δ_3 en cet unique point, soit ils sont parallèles et Δ_3 leur est donc parallèle.

Solution de l'exercice 67. Chassons les angles. Par cocyclicité, on a $\widehat{AEF} = \pi - \widehat{ABF} = \widehat{ABD} = \pi - \widehat{ACD}$, donc les droites (CD) et (EF) sont parallèles.

Solution de l'exercice 68. On traitera le cas où les points sont dans la configuration de la figure, les autres se traitent de façon similaire.



Les points P, P_A, B, P_C d'une part, P, A, P_B, P_C d'autre part sont cocycliques, d'où $\widehat{PP_C P_A} = \widehat{P B P_A} = \widehat{P B C}$ et $\widehat{PP_C P_B} = \widehat{P A P_B} = \widehat{P A C}$. Or les points P, Q, R sont alignés si et seulement si $\widehat{P_A P_C P_B} = 0$, soit $\widehat{PP_C P_A} = \widehat{PP_C P_B}$, donc si et seulement si $\widehat{P B C} = \widehat{P A C}$, donc si et seulement si les points A, B, C, P sont cocycliques.

Solution de l'exercice 69. Soient P, Q, R les points d'intersection de la droite l avec les côtés AB, BC, CA du triangle et P', Q', R' les symétriques de H et l_A, l_B, l_C les symétriques de la droite l par rapport à ces mêmes côtés. Soit M l'intersection des droites l_A et l_B . Le triangle $P'Q'R'$ est l'image du triangle orthique de ABC par l'homothétie de centre H et de rapport 2. On a donc $\widehat{Q'P'R'} = \pi - 2\hat{A}$. D'autre part on a

$$\widehat{Q'MR'} = 2\pi - \widehat{MQ'H} - \widehat{HR'M} - \widehat{Q'HR'}$$

l'angle $\widehat{Q'HR'}$ étant ici l'angle obtus, on a en considérant l'angle aigu

$$\widehat{Q'MR'} = \widehat{Q'HR'} - \widehat{MQ'H} - \widehat{HR'M} = \widehat{Q'HR'} - (\pi - \widehat{Q'HR'}).$$

Or par cocyclicité on a $\widehat{Q'HR'} = \pi - \hat{A}$, d'où

$$\widehat{Q'MR'} = -\pi + 2(\pi - \hat{A}) = \pi - 2\hat{A} = \widehat{Q'P'R'}.$$

Par conséquent le point M appartient au cercle circonscrit à $P'Q'R'$, il s'agit donc de la seconde intersection de l_A avec ce cercle. On montre qu'il en est de même avec l'intersection des droites l_A et l_C , donc ces trois droites sont concourantes. Or le cercle circonscrit à $P'Q'R'$ est le cercle circonscrit à ABC , donc les trois droites l_A, l_B, l_C se coupent sur le cercle circonscrit à ABC .

Solution de l'exercice 70. En calculant la puissance de P par rapport aux deux cercles on a $PB \cdot PN = PX \cdot PY = PC \cdot PM$. Par conséquent le quadrilatère $MBCN$ est inscriptible, d'où $\widehat{MNB} = \widehat{MCB}$. Les triangles MAC et BND sont rectangles, on a donc $\widehat{MAC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{MCA} = \pi - \widehat{MND}$. Par conséquent le quadrilatère $AMND$ est inscriptible. Les droites $(XY), (AM), (DN)$ sont les axes radicaux des cercles de diamètres $[AC], [BD]$, et du cercle circonscrit à $AMND$, donc elles sont concourantes.

Solution de l'exercice 71. (i) Montrons que le triangle $H_A H_B C$ est indirectement semblable au triangle ABC , les autres résultats se montrent de la même manière. Les deux triangles partageant l'angle en C , il suffit de montrer $\widehat{ABC} = \widehat{H_A H_B C}$. Comme les angles $\widehat{A H_A B}$ et $\widehat{A H_B B}$ sont droits, les points A, B, H_A, H_B sont cocycliques. On a donc

$$\widehat{ABC} = \widehat{A B H_A} = \pi - \widehat{A H_B H_A} = \widehat{H_A H_B C}.$$

(ii) D'après la question précédente, les angles $\widehat{C H_A H_B}$ et $\widehat{B H_A H_C}$ sont tous deux égaux à \widehat{BAC} , donc la droite (BC) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{H_B H_A H_C}$. Or la hauteur $(A H_A)$ est perpendiculaire à (BC) , donc $(A H_A)$ est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{H_B H_A H_C}$. On montre de la même manière les autres résultats.

(iii) Pour montrer que le symétrique de H par rapport à la droite (BC) est sur le cercle circonscrit à ABC , il suffit de montrer que l'angle \widehat{BHC} est le supplément de l'angle \widehat{BAC} . Or on a

$$\widehat{BHC} = \pi - \widehat{HBC} - \widehat{HCB} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BCA}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{CBA}\right) = \pi - \widehat{BAC}.$$

Solution de l'exercice 72. (Voir la figure 1, page 40.) (i) Soit G le point de coordonnées barycentriques $(A; 1), (B; 1), (C; 1)$. Les coordonnées barycentriques de la droite (AG) sont alors $(A; a), (B; 1), (C; 1)$ pour a variant dans \mathbb{R} . Or le point A' a pour coordonnées $(A; 0), (B; 1), (C; 1)$, donc il appartient à la droite (AG) . De même on montre que B' appartient à (BG) et C' à (CG) . Par conséquent les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes. Comme le point G a pour coordonnées $(A; 1), (B; 1), (C; 1)$, il a aussi pour coordonnées $(A; 1), (A'; 2)$, donc le point G est au tiers de la médiane entre A' et A .

(ii) Soit O l'intersection des médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$. On en déduit les égalités $OA = OB$ et $OA = OC$. Par conséquent on a $OA = OC$, donc le point O est sur la médiatrice du segment $[AC]$, et il est à égale distance des trois points A, B et C . Or le centre du cercle circonscrit est le seul point du plan à satisfaire cette propriété, donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

(iii) Soit h l'homothétie de centre G et de rapport -2 . D'après (i), l'homothétie h envoie les points A', B' et C' sur A, B et C respectivement. Par conséquent la médiatrice du côté $[BC]$ passant par A' est envoyée par h sur une droite perpendiculaire à (BC) et passant par A , donc sur la hauteur (AH) . De même, h envoie les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ sur les hauteurs (CH) et (BH) . En particulier, h envoie l'intersection O des médiatrices sur un point H , qui est donc l'intersection des hauteurs du triangle ABC . Notons alors la relation $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.

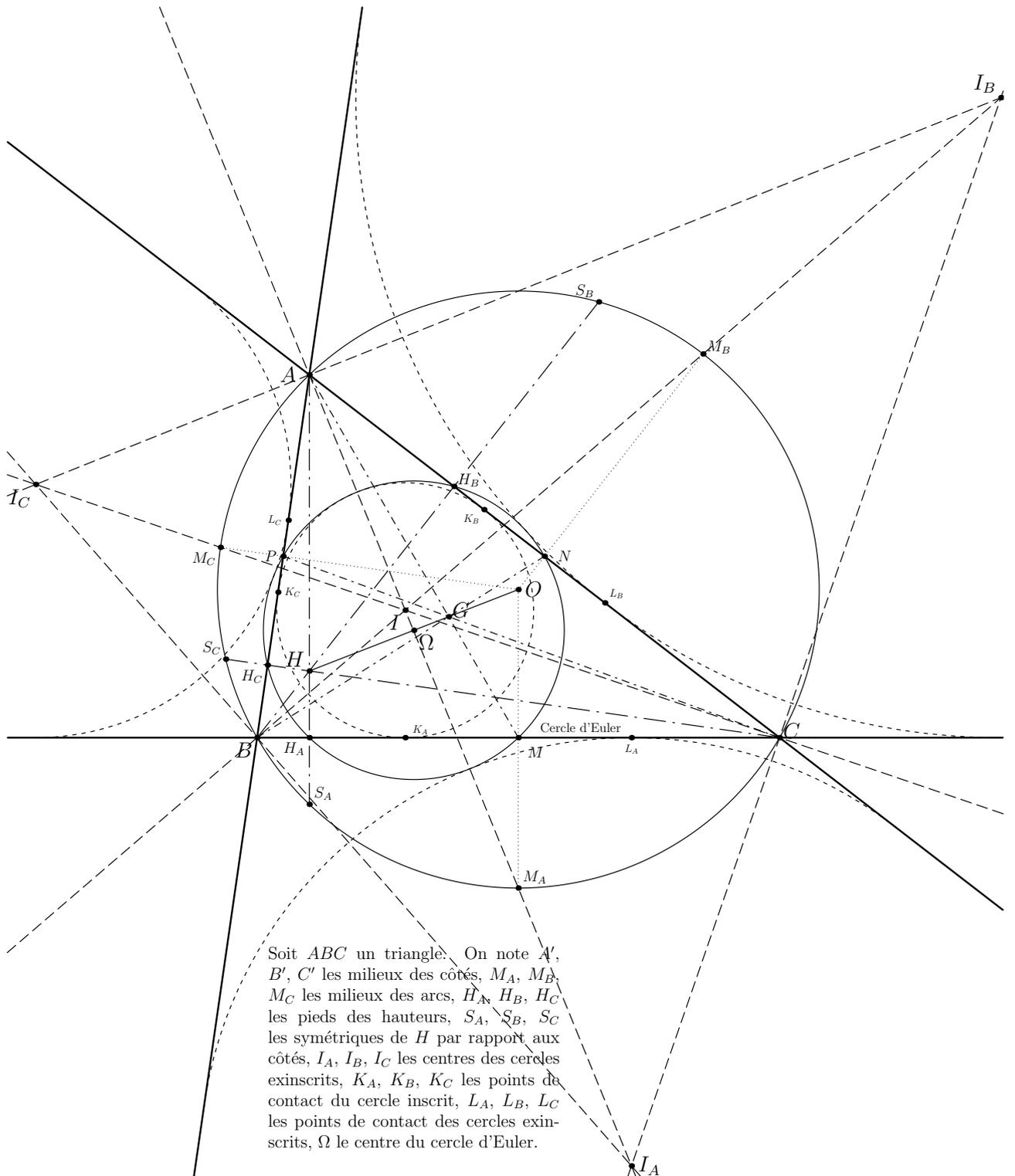
(iv) Soit h' l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. Remarquons que h' est la réciproque de l'homothétie h introduite précédemment. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC . L'homothétie h' envoie le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$, donc le cercle Γ est envoyé sur un cercle Γ' , circonscrit au triangle $A'B'C'$. Le point Ω vérifie alors $\overrightarrow{G\Omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$. Comme on a $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$, on en déduit $\overrightarrow{G\Omega} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GO}$, et comme le point G est au tiers du segment $[OH]$, on a $\overrightarrow{\Omega H} = -\overrightarrow{\Omega O}$. Par conséquent le point Ω est le milieu du segment $[OH]$.

Les droites $(A'O)$ et (AH) étant parallèles, le point Ω étant au milieu entre ces deux droites, et la droite (BC) étant perpendiculaire à celles-ci, les points d'intersection A' et H_A de (BC) avec $(A'O)$ et (AH) respectivement sont à égale distance du point Ω . Comme A' est sur le cercle Γ' de centre Ω , le point H_A est aussi sur Γ' . De même on montre que les points H_B et H_C appartiennent au cercle Γ' .

Soit h'' l'homothétie de centre H et de rapport 2 . D'après la question (iii) de l'exercice précédent, h'' envoie les points H_A, H_B et H_C sur le cercle Γ circonscrit au triangle ABC . Par conséquent h'' envoie le cercle Γ' , passant par H_A, H_B et H_C , sur le cercle Γ . Or les antécédents des points A, B et C par h'' , c'est-à-dire les points envoyés sur A, B et C par h'' , sont les points P_A, P_B et P_C . Par conséquent, ces derniers appartiennent au cercle Γ' .

Solution de l'exercice 73. (i) Comme les angles $\widehat{B A I_A}$ et $\widehat{C A I_A}$ sont égaux, les arcs du cercle circonscrit compris entre B et I_A et entre C et I_A sont de même longueur. Par conséquent, les segments $[B I_A]$ et

FIGURE 1 – Un triangle et tous ses points remarquables



$[CI_A]$ sont aussi de même longueur, d'où l'égalité $BI_A = CI_A$. Par conséquent le point I_A appartient à la médiatrice du segment $[BC]$, et donc la droite $I_A O$ est la médiatrice de $[BC]$.

(ii) Montrons que le triangle BII_A est isocèle en I_A . Cela suffit pour montrer l'égalité $BI_A = II_A$. Soit α l'angle égal à la moitié de l'angle \widehat{BAC} , soit β la moitié de \widehat{CBA} et γ la moitié de \widehat{ACB} . On a donc les relations

$$\widehat{IBI_A} = \widehat{IBC} + \widehat{CBI_A} = \widehat{IBC} + \widehat{CAI_A} = \beta + \alpha$$

et

$$\widehat{BI_A I} = \widehat{BCA} = 2\gamma.$$

On en déduit

$$\widehat{BII_A} = \pi - \widehat{BI_A I} - \widehat{IBI_A} = \pi - \beta - \alpha - 2\gamma = \alpha + \beta = \widehat{IBI_A}.$$

Par conséquent le triangle BII_A est isocèle en I_A et on a bien $BI_A = II_A$.

Solution de l'exercice 74. Soient K' et M' les projections de N sur (AB) et (AC) respectivement. Comme L et N sont sur la bissectrice de \widehat{A} , on a $KL = LM$ et $K'N = NM'$. Or on a $BN = CN$ et $\widehat{K'BN} = \widehat{M'CN}$, donc les triangles BNK' et CNM' sont superposables, d'où $BK' = CM'$.

Soit α l'angle moitié de l'angle \widehat{A} , on a

$$[ABC] = AB \cdot KL \sin \alpha + AC \cdot LM \sin \alpha = (AB + AC) \cdot KL \sin \alpha.$$

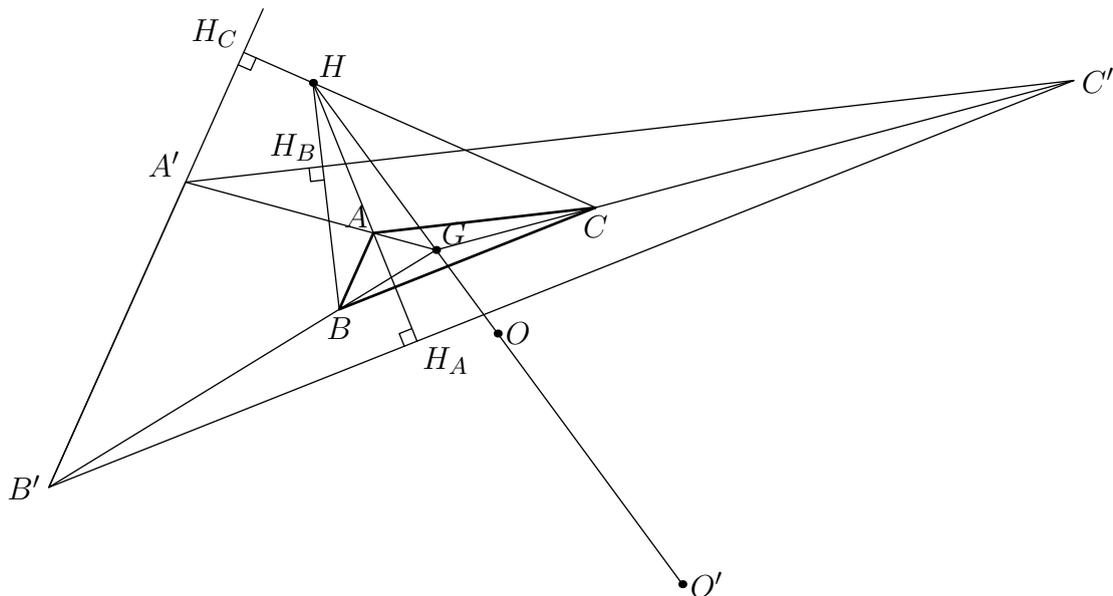
Or on a $AB + AC = AK' + AM'$ d'où

$$[ABC] = (AK' + AM') KL \sin \alpha = [AKLM] + [K'KL] + [LMM'],$$

d'où par parallélisme de (KL) et $(K'N)$ et de (LM) et (NM')

$$[ABC] = [AKLM] + [KLN] + [LMN] = [AKNM].$$

Solution de l'exercice 75.

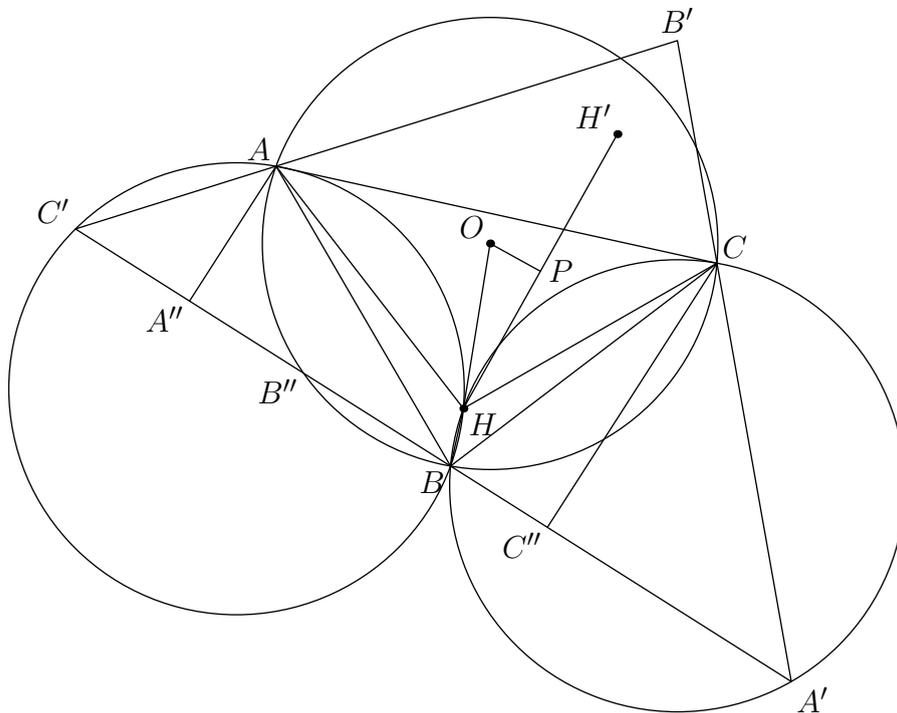


Soit H l'orthocentre du triangle ABC , G son centre de gravité et O le centre de son cercle circonscrit. Soit $A'B'C'$ l'image de ABC par l'homothétie h de centre G et de rapport 4, soient H' et O' les images de H et O par h . Soit H_A , H_B , H_C les projections de H sur les droites $(B'C')$, $(C'A')$, $(A'B')$.

La distance de G à la droite $(B'C')$ est 4 fois la distance de G à la droite (BC) et la distance de A à (BC) est 3 fois cette distance, par conséquent la distance entre A et (BC) est égale à la distance entre les droites (BC) et $(B'C')$, donc le point H_A est le symétrique du point A par rapport à BC . Il en est de même pour les points H_B et H_C . Par conséquent les points H_A, H_B et H_C sont alignés si et seulement si le point H appartient au cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$, donc si et seulement si on a $HO' = R(A'B'C') = 4R(ABC)$ en notant $R(ABC)$ le rayon du cercle circonscrit à ABC .

L'image de la droite d'Euler par h est elle-même car G , centre de h , est dessus. On a donc $HO' = HG + GO' = HG + 4OG = 2OG + 4OG = 6OG = 2OH$. Par conséquent H est sur le cercle circonscrit à $A'B'C'$ si et seulement si on a $OH = 2R(ABC)$ et la preuve est finie.

Solution de l'exercice 76. Soit O' le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$. Une figure suggère de montrer que les points H et O' sont confondus (bien qu'on ne sache pas encore à quoi cela peut servir). Comme on a $\widehat{BHC} = \pi - \widehat{BAC} = \pi - \widehat{BA'C}$, les points B, H, C, A' sont cocycliques. De plus le rayon du cercle circonscrit à ces points est égal à celui du cercle circonscrit à ABC puisqu'il s'agit du cercle symétrique par rapport à BC . De même les points A, H, B, C' sont cocycliques et le rayon du cercle passant par ces points est égal à celui du cercle passant par B, H, C, A' . D'après l'exercice 22, la corde $A'C'$ étant commune aux deux cercles, on a $HA' = HC'$, de même on montre $HA' = HB'$ et donc H est le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$, d'où $H = O'$.



Montrer $OH = OH'$ revient à montrer que le triangle HOH' est isocèle en O . Soit P la projection de O sur HH' , cela revient encore à montrer que P est le milieu de HH' . Les triangles ABC et $A'B'C'$ étant semblables, il existe une similitude s envoyant ABC sur $A'B'C'$. Soit k le rapport de s et α son angle. On a $HP = HO \cos \alpha$ et $H'H = H'O' = kHO$. On cherche donc à montrer la relation $k = 2 \cos \alpha$.

Pour montrer cette relation qui ne dépend que de la construction initiale des triangles, on va complètement oublier les points H, O et H' pour revenir aux seuls côtés des triangles. Soient A'' et C'' les projetés de A et C sur $A'C'$. L'angle entre les droites (AC) et $(A'C')$ valant α , on a $A''C'' = AC \cos \alpha$. Or on a $A'C' = kAC$, donc il suffit de montrer la relation $2A''C'' = A'C'$.

Soit B'' la seconde intersection du cercle circonscrit à ABC avec la droite $(A'C')$. Par cocyclicité des points A, B, C, B'' on a (voir sur la figure pour la position relative des points) la relation $\widehat{AB''C} = \widehat{ACB} = \widehat{AC'B''}$, donc le triangle $AB''C$ est isocèle en A . Par conséquent on a $A'C' = A''B''$ et on montre de même $C''A' = C''B''$. La relation recherchée s'obtient par somme de ces deux dernières égalités.

Arithmétique

Solution de l'exercice 77. On note S_n la somme des chiffres de b_n . On a $S_0 = 9$. On a $b_{n+1} = a_{n+1}b_n = 10^{2^{n+1}}b_n - b_n$. Sachant que a_n possède 2^n chiffres, b_n possède au plus $2^{n+1} - 1$ chiffres (remarquer que le nombre de chiffres d'un produit est au plus la somme des nombres de chiffres des facteurs).

La décomposition

$$b_{n+1} = 10^{2^{n+1}}(b_n - 1) + (10^{2^{n+1}} - b_n)$$

permet de trouver les 2^{n+1} chiffres de la première moitié et de la seconde. On trouve ainsi $S_{n+1} = (S_n - 1) + (9 \times 2^{n+1} - S_n + 1) = 9 \times 2^{n+1}$.

Solution de l'exercice 78. Soit x l'entier recherché, et $n + 1$ son nombre de chiffres. Alors $x = 25(x - 6 \times 10^n)$, soit $x = 10^n/4$. Les sols sont les 625×10^k , c'est-à-dire les nombres qui s'écrivent $6250 \dots 0$.

Si x est un nombre commençant par le chiffre a , on devrait dans le second cas avoir $x = 35(x - a \cdot 10^n)$, c'est-à-dire $a \cdot 10^n = 34x$, ce qui n'est pas possible car 17 ne divise ni a ni 10.

Solution de l'exercice 79. Puisque $100 \equiv 1$ modulo 99, tout nombre est congru à la somme de ses groupes de 2 chiffres en partant de la droite modulo 11. Puisque $7 \times 11 \times 13 = 1001$, tout nombre est congru modulo 7, 11, 13 à la somme alternée de ses groupes de 3 chiffres partant de la droite.

Solution de l'exercice 80. Si $p = 2$, tous les nombres pairs conviennent. Si $p > 2$, on a $2^{p-1} \equiv 1$ modulo p . On en déduit que pour $n = (kp - 1)(p - 1)$, où k est un entier positif quelconque, 2^n et n sont tous deux congrus à 1 modulo p .

Solution de l'exercice 81. Soit x un nombre impair non multiple de 3. Alors x^2 est congru à 1 modulo 3 et 8, donc modulo 24, et x est de la forme $\sqrt{24k + 1}$.

Solution de l'exercice 82. Comme k est multiple de 4, il suffit de montrer que $l = \frac{1 + \sqrt{28n^2 + 1}}{2}$ est lui-même un carré parfait. Or $l(l - 1) = 7n^2$. Comme l et $(l - 1)$ sont premiers entre eux, si l n'est pas multiple de 7, c'est fini.

Supposons au contraire que l soit multiple de 7. Dans ce cas, c'est $(l - 1)$ qui est un carré, donc l est la forme $m^2 + 1$ qui ne peut jamais être un multiple de 7.

Solution de l'exercice 83. Si n n'est pas un nombre premier, n divise $(n - 1)!$, sauf si $n = 4$. En effet, on peut trouver deux diviseurs stricts d et e , dont le produit est n . Si $d \neq e$, c'est fini, sinon, $(n - 1)!$ est divisible par d et par $2d$.

Si au contraire p est premier, on associe à chaque entier entre 1 et $p - 1$ son inverse modulo p , c'est-à-dire un entier a entre 1 et $p - 1$ tel que $ax \equiv 1$. Chaque entier a un inverse unique, qui est différent de lui-même sauf si et uniquement si $x^2 \equiv 1$, c'est-à-dire si x vaut 1 ou $p - 1$. On groupe ainsi les facteurs de $(p - 1)!$ en paires d'inverses dont le produit fait 1, et il reste -1.

Solution de l'exercice 84. Par la formule de Legendre, l'exposant de 2 dans la décomposition en facteurs premiers de $n!$ est la somme S_n des $\lfloor n/2^k \rfloor$ pour $k > 0$. Celle-ci est strictement inférieure à n puisque tous les termes ne sont pas entiers.

Soit $n = \sum_{i=1}^r 2^{\alpha_i}$ l'écriture en base 2 de n . On vérifie facilement que $S_n = \sum S_{2^{\alpha_i}} = \sum 2^{\alpha_i} - 1 = n - r$. Donc $S_n = n - 1$ si et seulement si n est une puissance de 2.

Solution de l'exercice 85. L'équation est équivalente à $x^3 + 4 = (2y + 1)^2$, soit $x^3 = (2y + 3)(2y - 1)$. Donc x est impair. Si p est un diviseur premier de x , p divise soit $2y - 1$, soit $2y + 3$ mais pas les deux. Donc $2y - 1$ et $2y + 3$ sont des cubes, ce qui n'est pas possible, car la différence entre deux cubes vaut 0, 1, 2 ou au moins 6.

Solution de l'exercice 86. Remarquons que $12345 = 63 \times 196 - 3$. Soit $N = \lfloor 32x \rfloor$. Alors $12345 = \lfloor N \rfloor + \lfloor N/2 \rfloor + \lfloor N/4 \rfloor + \lfloor N/8 \rfloor + \lfloor N/16 \rfloor + \lfloor N/32 \rfloor$. Si $N' = N - 196$, on a donc $\lfloor N' \rfloor + \lfloor N'/2 \rfloor + \lfloor N'/4 \rfloor + \lfloor N'/8 \rfloor + \lfloor N'/16 \rfloor + \lfloor N'/32 \rfloor = -3$.

C'est impossible : si $N' \geq 0$, le résultat est au moins zéro, et si $N' < 0$, chaque terme vaut au plus -1.

Solution de l'exercice 87. Comme $\lfloor r_i n \rfloor > r_i n - 1$, on a $0 \leq f(n) < m$. Si N est un multiple de tous les dénominateurs des r_i , les $r_i N$ sont entiers, donc $f(N) = 0$. On a alors $r_i(N-1) - \lfloor r_i(N-1) \rfloor = r_i(N-1) - (r_i N - 1)$ soit en sommant $f(N-1) = m-1$.

Solution de l'exercice 88. On a

$$(a^2 - 7b^2)(c^2 - 7d^2) = (ac + 7bd)^2 - 7(ad + bc)^2.$$

Solution de l'exercice 89. On pose

$$k = \left(\frac{(\sqrt{2} + 1)^n + (\sqrt{2} - 1)^n}{2} \right)^2$$

et

$$l = \left(\frac{(\sqrt{2} + 1)^n - (\sqrt{2} - 1)^n}{2} \right)^2.$$

On a alors $(\sqrt{2} - 1)^n = \sqrt{k} - \sqrt{l}$, et $k - l = (\sqrt{2} + 1)^n (\sqrt{2} - 1)^n = 1$. On vérifie par la formule du binôme que k et l sont entiers.

Solution de l'exercice 90. On utilise l'algorithme d'Euclide pour trouver $a^d - 1$ où d est le PGCD de p et q . On a en effet si $p = bq + r$

$$(a^p - 1) = (a^q - 1)(a^{q(b-1)+r} + a^{q(b-2)+r} + \dots + a^r) + a^r - 1.$$

Solution de l'exercice 91. Si $x + a$, $x + b$, $x + c$ sont en progression géométrique, c'est-à-dire $(x + b)^2 = (x + a)(x + c)$, on a $2bx + b^2 = (a + c)x + ac$, soit $x = \frac{b^2 - ac}{a + c - 2b}$ (il n'est pas possible que $a + c = 2b$).

Réciproquement, si x est rationnel, on cherche à écrire $x = \frac{b^2 - ac}{a + c - 2b}$. Posons $c = b + q$ et $a = b - p$, on cherche alors $x = \frac{pb - qb + pq}{q - p} = \frac{pq}{q - p} - b$. Si $x = f/g$, on pose donc $p = f$, $q = f + fg$, $b = f$: ceci signifie que x , $x + f$, et $x + 2f + fg$ sont en progression arithmétique.

Solution de l'exercice 92. La somme des p_A pour toutes les parties de S , même la partie vide, est égale au produit des $1 + a_i$ (en posant $p_\emptyset = 1$). On pose donc

$$\pi(S) := (2^r - 1)m(S) + 1 = (1 + a_1) \cdots (1 + a_r)$$

et on note $S' = S \cup \{a_{r+1}\}$.

On a ainsi $\pi(S) = 2^r \times 13 - 12$ et $\pi(S') = 2^r \times 98 - 48$. De plus, $\pi(S)(1 + a_{r+1}) = \pi(S')$. La formule

$$(2^r \times 98 - 48) + (2^r \times 6 - 48) = 8 \times (2^r \times 13 - 12)$$

montre que $\pi(S)$ doit diviser $2^r \times 6 - 48$. Si $r > 3$, c'est impossible, car on aurait $0 < 2^r \times 6 - 48 < 2^r \times 13 - 12$.

On calcule :

r	$2^r \times 13 - 12$	$2^r \times 6 - 48$
1	14	-36
2	40	-24
3	92	0

Donc r vaut 3, $\pi(S) = 92$, $\pi(S') = 736$ et $a_4 = 7$. Ensuite

$$\pi(S) = (1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) = 2^2 \times 23$$

a pour diviseurs 1, 2, 4, 23, 46, 92, d'où les possibilités $S = \{0, 1, 45\}$ et $S = \{0, 3, 22\}$.

Solution de l'exercice 93. L'indicatrice d'Euler de 2^{2007} est 2^{2006} , donc n divise 2^{2006} : c'est une puissance de 2. Posons $a = 1 + m \cdot 2^k$, où m est un entier impair. On a

$$a^n = 1 + n(m \cdot 2^k) + \frac{n(n-1)}{2}(m \cdot 2^k)^2 + \dots + \binom{n}{p}(m \cdot 2^k)^p + \dots$$

Lorsque $n = 2^q$ est une puissance de 2, $\binom{n}{p}$ est au moins divisible par $2^{q-v_2(p)}$, et le p -ième terme du développement de a^n est divisible par $2^{q-v_2(p)+kp}$ qui est strictement supérieur à 2^{q+k} si $p > 1$ (en supposant $k > 1$). La plus grande puissance de 2 qui divise $a^n - 1$ est donc limitée par le second terme de a^n . C'est donc 2^{q+k} . Le nombre n recherché est donc 2^{2007-k} où k est le nombre de chiffres suivant l'avant-dernier 1 dans l'écriture binaire. Par exemple, pour 111000101, c'est deux.

Si $k = 1$, on a en fait $a = -1 + m \cdot 2^{k'}$ avec $k' > 1$. On a alors un développement avec les mêmes termes au signe près, mais le même raisonnement s'applique, et $n = 2^{2007-k'}$, et k' est le nombre de 1 qui suivent le dernier zéro de l'écriture de a , par exemple pour 101011111, c'est cinq.

Solution de l'exercice 94. Soit m_n le plus grand nombre parmi p_1, \dots, p_n . On veut majorer m_{n+1} : c'est soit m_n , soit le plus grand diviseur premier de $P = p_n + p_{n-1} + 2008$. Si P est pair, alors m_{n+1} vaut au plus $P/2 \leq m_n + 1004$. Si P est impair, l'un des p_n, p_{n-1} est égal à 2, et $m_{n+1} \leq m_n + 2010$.

Ainsi, l'écart entre deux termes successifs de la suite (m_n) (qui est croissante) est majoré par 2010. Elle ne peut donc pas dépasser $2011! + 1$, car aucun des 2010 nombres suivants n'est premier.

Solution de l'exercice 95. Il faut remarquer que la différence de valeurs successives d'un polynôme de degré 3 comme $P(x) = \binom{x}{3} = x(x-1)(x-2)/6$ est un polynôme de degré 2. On a ainsi $P(x+1) - P(x) = x(x-1)/2$. On peut donc former $P(x+3) - P(x+2) - P(x+1) + P(x) = 2x + 1$.

Choisissons a_5 plus grand que k tel que $P(a_5)$ soit de parité différente de x . Posons $P(a_5) + x = 2m + 1$, on pose alors $a_1 = m + 3$, $a_2 = m + 2$, $a_3 = m + 1$, $a_4 = m$. Et alors

$$n = -\binom{a_1}{3} + \binom{a_2}{3} + \binom{a_3}{3} - \binom{a_4}{3} - \binom{a_5}{3}$$

Solution de l'exercice 96. Laissée au lecteur.

Solution de l'exercice 97. L'idée essentielle permettant d'aborder cet exercice, c'est de voir dans « les deux plus gros termes » du membre de gauche le début d'un carré : $x^4 + x^3$ est le début de $(x^2 + \frac{x}{2})^2 = x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4}$, de sorte que, pour tout x et tout y entiers naturels, $y^2 = (x^2 + \frac{x}{2})^2 + \frac{3x^2}{4} + x + 1$, donc en particulier $y > x^2 + \frac{x}{2}$. Si l'on prouve que $y < x^2 + \frac{x+1}{2}$, alors y ne pourra pas être entier car entre ces deux nombres $x^2 + \frac{x}{2}$ et $x^2 + \frac{x+1}{2}$, distants de $1/2$, dont l'un est entier, il n'y a pas d'entier.

Or

$$\left(x^2 + \frac{x+1}{2}\right)^2 = x^4 + x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = y^2 + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} = y^2 + \frac{(x+1)(x-3)}{4}$$

car le trinôme du second degré se factorise élémentairement. Pour $x > 3$, on a bien $\frac{(x+1)(x-3)}{4} > 0$, donc $x^2 + \frac{x+1}{2} > y$, ce qui prouve qu'il n'existe pas d'entier y vérifiant l'équation. En revanche, si $x = 3$, le trinôme étant nul, $y = x^2 + \frac{x+1}{2} = 11$: nous avons là une solution entière de l'équation, $1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 11^2$. Pour $x < 3$, notre méthode ne permet pas de conclure, et ces quelques cas restants doivent être étudiés à la main :

- ☞ $x = 2$, $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$ n'est pas le carré d'un entier,
- ☞ $x = 1$, $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ n'est pas non plus le carré d'un entier,
- ☞ $x = 0$, $1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$ est le carré d'un entier, 1.

En définitive, nous avons deux couples solutions : (0, 1) et (3, 11).

Solution de l'exercice 98. Cet énoncé dans sa forme doit instantanément nous évoquer l'identité remarquable suivante : pour tout a et tout b (entiers ou réels, peu importe) et tout n entier supérieur à 2,

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Écrivons la division euclidienne $n = mq + r$, ($r < m$). Donc $a^n + b^n = a^r(a^{mq} + b^{mq}) - b^{mq}(a^r - b^r)$ et $a^n + b^n = a^r(a^{mq} - b^{mq}) + b^{mq}(a^r + b^r)$.

Or $a^m + b^m$ divise soit $a^{mq} - b^{mq}$, soit $a^{mq} + b^{mq}$ selon la parité de q . Il en résulte que $a^m + b^m$ doit diviser soit $b^{mq}(a^r - b^r)$, soit $b^{mq}(a^r + b^r)$. Comme a et b sont premiers entre eux, $a^m + b^m$ et b^{mq} ne peuvent pas avoir de diviseurs communs (un nombre premier divisant b^{mq} diviserait b , donc b^m , donc a^m donc a), d'où, en application du théorème de Gauss, $a^m + b^m$ doit diviser soit $a^r - b^r$, soit $a^r + b^r$. Or — propriété essentielle de la division euclidienne — $r < m$. Donc $0 < a^r + b^r < a^m + b^m$ et $a^r + b^r$ ne peut pas être un multiple de $a^m + b^m$ car le quotient serait strictement compris entre 0 et 1. De même, le quotient de $a^r - b^r$ par $a^m + b^m$ est strictement compris entre -1 et 1 : il ne peut être entier que s'il est nul, donc si $r = 0$. Ce qui signifie bien que $a^m + b^m$ ne peut diviser $a^n + b^n$ que si $r = 0$ (donc n multiple de m), et q impair. Cela démontre plus que ce qui était demandé, et nous avons vu que réciproquement, si n est un multiple impair de m , la divisibilité est bien vérifiée.

Solution de l'exercice 99. C'est un autre type d'exercice, où la remarque fondamentale est que si a, b, c sont « grands », alors $(a-1)(b-1)(c-1)$ est trop près de $abc - 1$ pour en être un diviseur.

Il est clair que $(a-1)(b-1)(c-1) < (a-1)bc = abc - bc < abc - 1$. Par contre, si $(a-1)(b-1)(c-1) \geq \frac{abc}{2}$, alors $\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} < 2$ ne peut pas être entier, car il n'existe pas d'entier strictement compris entre 1 et 2. Or la fonction $\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ est croissante et tend vers 1 lorsque x croît vers l'infini. En particulier, puisque $1 < a < b < c$, ce qui entraîne $a \geq 2, b \geq a+1, c \geq b+1 \geq a+2, \frac{b-1}{b} \geq \frac{a}{a+1}, \frac{c-1}{c} \geq \frac{a+1}{a+2}$, de sorte que $\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc} \geq \frac{a-1}{a+2}$.

Le quotient $q = \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$ vérifie donc :

- ☞ si $a = 2$, $1 < q < \frac{a+2}{a-1} = 4$, donc $q = 2$ ou $q = 3$,
- ☞ si $a = 3$, $1 < q < \frac{a+2}{a-1} = 5/2$, donc $q = 2$,
- ☞ si $a \geq 4$, $1 < q < \frac{a+2}{a-1} \leq 2$ dans la mesure où la fonction $\frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$ est décroissante.

Les seules solutions envisageables sont donc pour $a = 2$ ou $a = 3$.

Pour $a = 2$, on est ramené à voir quand $\frac{2bc-1}{(b-1)(c-1)}$ vaut 2 ou 3. Le numérateur étant impair, le quotient q ne peut pas valoir 2, et l'équation $2bc - 1 = 3(b-1)(c-1)$ se développe en $bc - 3b - 3c + 4 = 0$, soit $(b-3)(c-3) = 5$. Comme $b < c$, les seules solutions sont $b = 4$ et $c = 8$. On vérifie bien que $3 \times 7 = 21$ divise $(2 \times 4 \times 8) - 1 = 63$.

Pour $a = 3$, on se ramène de même à $3bc - 1 = 4(b-1)(c-1)$, car $q = 2$ donc $q(a-1) = 4$, soit $bc - 4b - 4c + 5 = 0$, ou encore $(b-4)(c-4) = 11$, d'où $b = 5$ et $c = 15$, ce qui fournit une dernière solution (3, 5, 15). De fait, $2 \times 4 \times 14 = 112$ divise $(3 \times 5 \times 15) - 1 = 224$.

Le problème admet donc deux solutions : (2, 4, 8) et (3, 5, 15).

Solution de l'exercice 100. Posons $k = 2007$, et appelons a_1, a_2, \dots, a_k des puissances k -ièmes de nombres premiers distincts, donc deux à deux premières entre elles.

Le théorème chinois permet d'affirmer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que :

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{a_1} \\ n \equiv 2 \pmod{a_2} \\ \vdots \\ n \equiv k \pmod{a_k} \end{cases}$$

ce qui signifie précisément que $n-1$ est divisible par a_1 , $n-2$ par a_2 , ..., $n-k$ par a_k ; $n-1, n-2, \dots, n-k$ sont bien k entiers consécutifs vérifiant les conditions de l'énoncé, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 101. Cet exercice est une des multiples variantes de l'égalité de Sophie Germain :

$$n^4 + 4k^4 = (n^2 + 2k^2)^2 - (2kn)^2 = (n^2 - 2kn + 2k^2)(n^2 + 2kn + 2k^2),$$

qui permet de factoriser une telle somme lorsque $a = 4k^4$. Qui plus est, lorsque $k > 1$, $n^2 - 2kn + 2k^2 = (n-k)^2 + k^2 \geq k^2$ ne peut pas être égal à 1, quel que soit n , tout comme $n^2 + 2kn + 2k^2$. Pour $a = 4k^4$, quel que soit $k > 1$, il est possible, pour tout n , de décomposer $n^4 + a$ en deux facteurs strictement supérieurs à 1, donc $n^4 + a$ n'est premier pour aucune valeur de n .

2 En colle

2.1 Les énoncés

Stratégies de base

Exercice 1 (donné à 12 élèves¹). On considère $2n+1$ nombres qui ont la propriété suivante : la somme de n quelconques d'entre eux est toujours strictement inférieure à la somme des $n+1$ autres. Montrer que tous les nombres sont strictement positifs.

Exercice 2 (donné aux mêmes élèves). On se donne sept entiers, deux à deux distincts, strictement positifs, dont la somme est 100. Montrer que l'on peut en trouver trois dont la somme vaut au moins cinquante.

Exercice 3 (donné aux mêmes élèves). Soit $n > 2$. Considérons $2n$ entiers deux à deux distincts strictement positifs a_1, a_2, \dots, a_{2n} , inférieurs ou égaux à n^2 . Montrer que trois des différences $a_i - a_j$ sont les mêmes.

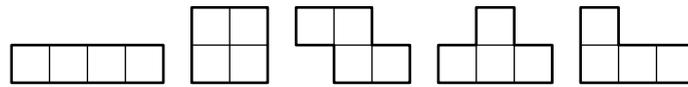
Exercice 4 (donné à Lucas Boczkowski). Montrer que $(1 + 2 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

Exercice 5 (donné à Ambroise Marigot et Thomas Williams). De la peinture blanche est jetée aléatoirement sur le sol d'une pièce de $2m \times 2m$. Montrer qu'il existe deux points de même couleur dont la distance est exactement $1m$.

Exercice 6 (donné à Vincent Langlet, Ambroise Marigot et Léonard Martelli). Peut-on partitionner l'ensemble $\{1, 2, \dots, 33\}$ en onze sous ensembles de trois éléments, tels que dans chacun des sous-ensembles, l'un des trois éléments soit la somme des deux autres ?

Exercice 7 (donné à Léonard Martelli). Peut-on paver un rectangle de dimensions 4×5 par les cinq pièces que voici ?

1. Martin Clochard, Noémie Combe, Camille Dessirier, Yrvann Emzivat, Alice Héliou, Anaïs Lecercf, Merlin Legrain, Maxime Martelli, Jean-François Martin, Jeanne Nguyen, Alexandre Nolin et Rémi Varloot



Exercice 8 (donné à Anca Arnautu). 51 points sont dans un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en trouver trois à l'intérieur d'un même cercle de rayon $1/7$.

Exercice 9 (donné à Lucas Boczkowski et Christopher Wells). Soient a_1, \dots, a_{10} des entiers. Montrer qu'il existe des $\varepsilon_i \in \{0, 1, -1\}$ tels que 1001 divise $\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_{10} a_{10}$.

Exercice 10 (donné à Dmitry Ivanov). Sur un quadrillage carré de côté n , on a colorié certaines cases en noir et les autres en blanc. Chaque case blanche est adjacente à une case noire, et l'on peut toujours passer d'une case noire à une autre en empruntant un chemin formé uniquement de cases noires (l'ensemble des cases noires est *connexe*). Montrer qu'il y a au moins $\frac{n^2-2}{3}$ cases noires.

Exercice 11 (donné à Marc Coiffier). Sur un quadrillage carré de côté 1000, combien au maximum peut-on colorier de cases en noir de façon à ce que l'on ne puisse pas trouver trois cases noires dont deux sont dans la même ligne et deux dans la même colonne ?

Exercice 12 (donné à Juliette Fournier). Quel est le plus grand nombre de sous-suites de la forme $n, n+1, n+2$ qu'une suite de 2007 entiers naturels peut avoir ? Par exemple, la suite 1, 2, 2, 3, 3 a 4 sous-suites de cette nature.

Exercice 13 (donné à William Fujiwara). On recouvre un échiquier avec 32 dominos. Montrer que le nombre de dominos horizontaux dont le carré blanc est à gauche est égal au nombre de dominos horizontaux dont le carré blanc est à droite.

Exercice 14 (donné à Thomas Cruzel). Un cube de côté 3 est divisé en 27 cubes unité. Ces petits cubes se voient assigner de manière aléatoire chacun un nombre entre 1 et 27, chaque nombre n'étant attribué qu'une seule fois. On joue de la manière suivante : à chaque étape on peut échanger le cube numéroté 27 avec un de ses voisins. Est-il possible de jouer de façon à obtenir la position où le cube 27 est revenu à sa place et où, pour tout n entre 1 et 26, le cube n a échangé sa place avec celle du cube $27-n$?

Exercice 15 (donné à Jean-Alix David et Charlotte Le Mouel). Douze maisons, bleues ou blanches, sont disposées en cercle. Dans ces douze maisons habitent douze peintres. Durant chacun des douze mois de l'année, un peintre différent sort et commence à repeindre les maisons dans le sens des aiguilles d'une montre, en commençant par la sienne. Il change la couleur de chaque maison qu'il rencontre jusqu'à avoir changé une maison blanche en bleue. Il s'arrête à ce moment là. On suppose qu'une des maisons était bleue au départ. Montrer que lorsque l'année est finie, les maisons ont toutes retrouvé leur couleur initiale.

Exercice 16 (donné à François Caddet et Philippe Cloarec). On joue sur un échiquier de côté 100. Un coup consiste à choisir un rectangle formé de cases de l'échiquier et à en inverser les couleurs. Quel est le plus petit nombre de coups qui permette de rendre l'échiquier entièrement noir ?

Exercice 17 (donné à Rémi Vergnaud). Vingt enfants attendent leurs grands-pères dans la cour de la maternelle. Deux enfants quelconques ont toujours un grand-père commun. Prouver qu'un des grands-pères a au moins 14 petits enfants dans cette école maternelle.

Exercice 18 (donné à Marcus Hanzig et Jean-Denis Zafar). Un graphe a n sommets et k arêtes. On suppose qu'il ne contient aucun triangle. Montrer que l'on peut en trouver un sommet P tel qu'il y ait au plus $k \left(1 - 4 \frac{k}{n^2}\right)$ arêtes qui relient deux points qui ne sont tous les deux pas reliés à P .

Exercice 19 (donné à Ambroise Marigot et Christopher Wells). Des disques de diamètre strictement inférieur à 0,02 sont disposés dans un carré de sorte que deux points intérieurs chacun à l'un de ces disques ne soient jamais distants de 0,02. Montrer que l'aire couverte par la réunion de ces disques est strictement inférieure à 0,35.

Exercice 20 (donné à Amélie Héliou et Adrien Laroche). Sur une île déserte vivent 34 caméléons. Au départ, 7 sont jaunes, 10 sont rouges et 17 sont verts. Lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils prennent tous deux la troisième couleur. Lorsque se rencontrent deux caméléons d'une même couleur, rien ne se passe. Au bout d'un an, tous les caméléons sont devenus de la même couleur. Laquelle ?

Exercice 21 (donné à Amélie Héliou et Adrien Laroche). Démontrer que parmi les stagiaires d'un stage Animath, il y en a au moins deux qui connaissent exactement le même nombre de stagiaires (on suppose que la relation « se connaître » est réciproque : si A connaît B , B connaît A).

Exercice 22 (donné à Guillaume B., Amélie Héliou et Ambroise Marigot). On dispose d'une pile de 1001 jetons. On utilise la règle suivante : au premier coup, on choisit un jeton, que l'on élimine du jeu, et on sépare la pile en deux piles arbitraires. Puis à chaque coup, on choisit un jeton que l'on élimine, et on sépare une pile (pas forcément celle dont on a extrait le jeton) en deux piles arbitraires. Peut-on se débrouiller pour qu'à un moment donné, on n'ait que des piles de trois jetons ? (Attention : si une pile ne comporte qu'un jeton et qu'on retire ce jeton, on considère qu'on a désormais une pile de zéro jeton, et non que la pile a disparu).

Exercice 23 (donné à Vincent Langlet et Adrien Laroche). On considère une suite de mouvements du Rubik's Cube. Montrer que si l'on répète un nombre suffisant de fois cette même combinaison de mouvements, on finit par retomber sur la position initiale.

Exercice 24 (donné à Mathieu Aria). On colorie le plan en trois couleurs. Montrer qu'il existe deux points d'une même couleur à distance 1.

Exercice 25 (donné à Louise Bertin). Pour quelles valeurs de n peut-on découper un carré en n carrés ?

Exercice 26 (donné à Thomas Williams). Peut-on paver un carré de côté 2^n privé d'une case (quelconque) par des pièces composées de trois carrés en forme de L ?

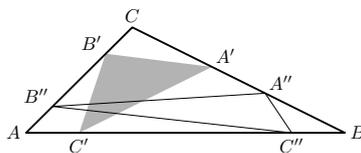
Exercice 27 (donné à Thomas Williams). La suite a_n vérifie : a_0 n'est pas un multiple de 5, et a_{n+1} est la somme de a_n et du dernier chiffre de a_n . Montrer que la suite contient une infinité de puissances de 2.

Exercice 28 (donné à Vincent Langlet). Existe-t-il un entier dont le cube exprimé en système décimal se termine par 2007 fois le chiffre 1 ?

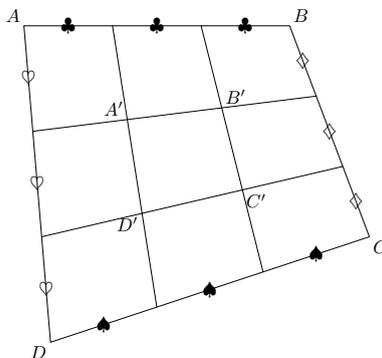
Géométrie

Exercice 29 (donné à 4 élèves²). Soit ABC un triangle et soient A' et A'' , B' et B'' , C' et C'' des points respectivement sur $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$, de telle sorte que $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{BC''}$, $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{CA''}$, $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AB''}$, comme sur la figure. Montrer que l'aire de $A'B'C'$ est égale à celle de $A''B''C''$.

2. Philippe Cloarec, Thomas Cruzel, Marcus Hanzig et Charlotte Le Mouel



Exercice 30 (donné à 4 élèves³). Soit $ABCD$ un quadrilatère. On partage chaque côté en trois parties égales, et on joint les points obtenus comme sur la figure suivante :



Montrer que l'aire de $A'B'C'D'$ est le neuvième de celle de $ABCD$.

Exercice 31 (donné à Philippe Cloarec, Juliette Fournier et Marcus Hanzig). Soit ABC un triangle. On note G son centre de gravité, I le centre de son cercle inscrit, et r le rayon. On note également $a = BC$ et $b = CA$. Montrer que l'aire du triangle CIG est égale à $\frac{|a-b|r}{6}$.

Exercice 32 (donné à Philippe Cloarec, Juliette Fournier et Marcus Hanzig). Montrer que dans un quadrilatère complet, les milieux des diagonales sont alignés.

Exercice 33 (donné à Jean-François Martin). Soient ABC un triangle rectangle en B et D un point de $[AC]$ tel que $CD = AB$. Montrer que dans le triangle ABD , la médiane issue de B , la bissectrice de l'angle \hat{A} et la hauteur issue de D sont concourantes.

Exercice 34 (donné à Jean-François Martin). Soient un cercle Γ et deux points B et C fixes sur Γ . Un troisième point A se déplace sur le cercle. Quel est le lieu de l'orthocentre H de ABC lorsque A parcourt le cercle ?

Exercice 35 (donné à Martin Clochard et Alice Héliou). On appelle H_A , H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A , B et C respectivement, H l'orthocentre de ABC , P l'orthocentre de AH_BH_C et Q l'orthocentre de CH_AH_B . Montrer que $PQ = H_CH_A$.

Exercice 36 (donné à Merlin Legrain). Soient ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Sur les côtés $[AC]$ et $[BC]$, on place D et E tels que $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ et $BE = AB$. Montrer que (DE) est perpendiculaire à (BO) .

Exercice 37 (donné à Yrvann Emzivat). Soit ABC un triangle. Un point M de $[BC]$ se projette en B' et C' respectivement sur (AC) et (AB) . Pour quel point M la longueur $B'C'$ est-elle minimale ?

Exercice 38 (donné à Anaïs Lecerf). Soient $ABCD$ un quadrilatère, M le milieu de $[AD]$ et N le milieu de $[BC]$. On suppose que $MN = \frac{AB+CD}{2}$. Montrer que $ABCD$ est un trapèze.

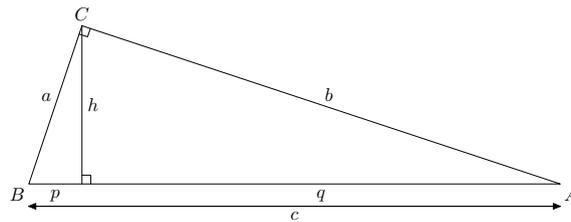
Exercice 39 (donné à Alexandre Nolin). Montrer que toute droite qui partage un triangle en deux polygones de même aire et de même périmètre passe par le centre du cercle circonscrit.

Exercice 40 (donné à Yrvann Emzivat). Soient A, B et C trois points non alignés. Montrer qu'il existe un unique point X du plan pour lequel :

$$XA^2 + XB^2 + AB^2 = XB^2 + XC^2 + BC^2 = XC^2 + XA^2 + CA^2.$$

Exercice 41 (donné à Camille Dessirier et Maxime Martelli). Dans un triangle, la hauteur, la médiane et la bissectrice relative au sommet A partagent l'angle \widehat{BAC} en quatre angles de même mesure α . Déterminer les angles de la figure en fonction de α , et calculer α .

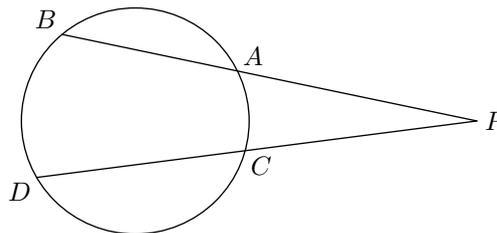
Exercice 42 (donné à 5 élèves⁴). Soit ABC un triangle rectangle en C . On note les différentes longueurs comme sur la figure ci-dessous.



Montrer les égalités suivantes :

$$a^2 = pc \quad ; \quad b^2 = qc \quad ; \quad h^2 = pq \quad ; \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Exercice 43 (donné à 4 élèves⁵). Considérons un cercle et un point P du plan. Deux droites passant par P coupent le cercle en A, B, C et D comme sur la figure ci-dessous :



Montrer l'égalité

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Exercice 44 (donné à 6 élèves⁶). Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit. Soit M le milieu de l'arc \widehat{AB} et Γ' le cercle de centre M passant par A et B . La droite (CM) coupe Γ' en I et J . Montrer que I et J sont les centres du cercle inscrit et d'un cercle exinscrit de ABC .

Exercice 45 (donné à Noémie Combe). Soient A, B, C, D, E, F et G des points du plan tels que $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GA$ et A, B, F, D d'une part et A, G, C, E d'autre part sont alignés. Calculer l'angle \widehat{EAD} .

4. Marc Coiffier, Jean-Alix David, Dmitry Ivanov, Florian Tep et Jean-Denis Zafar

5. Marc Coiffier, Jean-Alix David, Dmitry Ivanov et Jean-Denis Zafar

6. François Caddet, Pierre Camilleri, Marc Coiffier, Jean-Alix David, William Fujiwara et Quentin Soulet de Brugières

Exercice 46 (donné à Alice Héliou). A, B, C, D sont quatre points cocycliques. (AB) et (CD) se coupent en E . Montrer que

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}.$$

Exercice 47 (donné à Rémi Varloot). Dans un triangle ABC , l'angle \hat{A} est le double de l'angle \hat{B} , l'angle \hat{C} est obtus et les longueurs des côtés sont des entiers. Quel est le plus petit périmètre possible de ce triangle ?

Exercice 48 (donné à Jeanne Nguyen). On considère trois cercles isométriques et deux à deux tangents, $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, tous trois tangents intérieurement à un cercle Γ . Soit M un point quelconque sur Γ . On trace une tangente issue de M à \mathcal{C}_1 , une tangente issue de M à \mathcal{C}_2 et une tangente issue de M à \mathcal{C}_3 , et on appelle A, B, C les trois points de contact. Montrer que l'une des longueurs MA, MB, MC est somme des deux autres.

Exercice 49 (donné à Lucas Boczkowski et Christopher Wells). Sur un cercle, on place deux points A et C . Le point D est le milieu de l'arc \widehat{AC} . Le point B est un point de l'arc \widehat{DC} qui ne contient pas A . Montrer que la droite (BD) est la bissectrice extérieure du triangle ABC en B .

Soit E le projeté orthogonal de D sur la droite AB . Montrer que $AE = BE + BC$.

Exercice 50 (donné à Ambroise Marigot). Soit ABC un triangle, et D, E, F des points sur les segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$ respectivement tels que les céviennes correspondantes soient concourantes. Soient M, N, P des points sur les segments $[AD], [BE]$ et $[CF]$ respectivement. Montrer que les droites $(AM), (BN)$ et (CP) sont concourantes si et seulement si les droites $(DM), (EN)$ et (FP) le sont.

Exercice 51 (donné à Louise Bertin et Amélie Héliou). Soit ABC un triangle, et soient P, Q, R trois points du plan. Montrer que les perpendiculaires à $(BC), (AC), (AB)$ passant par P, Q, R respectivement sont concourantes si et seulement si les perpendiculaires à $(QR), (PR), (PQ)$ passant par A, B, C respectivement le sont.

Exercice 52 (donné à Anca Arnautu et Lucas Boczkowski). Étant donnés trois cercles deux à deux disjoints, montrer que les trois points d'intersection des tangentes extérieures aux trois paires de cercles sont alignés.

Exercice 53 (donné à Anca Arnautu et Vincent Langlet). Deux cercles se coupent en P et Q . Une droite passant par P coupe les cercles en A et A' . La droite parallèle passant par Q coupe les cercles en B et B' . Montrer que les périmètres des triangles PAA' et QBB' sont égaux.

Exercice 54 (donné à Adrien Laroche et Thomas Williams). Les diagonales d'un quadrilatère convexe $ABCD$ se coupent à angle droit en un point X . Montrer que les quatre points obtenus comme symétriques de X par rapport aux quatre côtés du quadrilatère sont cocycliques.

Arithmétique

Exercice 55 (donné à 11 élèves⁷). Résoudre $x^2 + y^2 + z^2 = xyz - 1$ en nombres entiers.

Exercice 56 (donné à 6 élèves⁸). Résoudre $n_1^4 + n_2^4 + \dots + n_{14}^4 = 1599$ en nombres entiers relatifs.

7. Mathieu Aria, Anca Arnautu, Guillaume B., Louise Bertin, Lucas Boczkowski, Vincent Langlet, Adrien Laroche, Ambroise Marigot, Léonard Martelli, Christopher Wells et Thomas Williams

8. Lucas Boczkowski, Vincent Langlet, Adrien Laroche, Ambroise Marigot, Christopher Wells et Thomas Williams

Exercice 57 (donné aux mêmes élèves). Trouver tous les $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $19x^3 - 17y^3 = 50$.

Exercice 58 (donné à 8 élèves⁹). Est-ce que 20042005 est la somme de trois cubes ?

Exercice 59 (donné à 5 élèves¹⁰). Trouver tous les cubes qui sont la somme de trois carrés consécutifs.

Exercice 60 (donné à Ambroise Marigot). Résoudre $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$ en nombres entiers relatifs.

Exercice 61 (donné à Ambroise Marigot). Résoudre $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ en nombres entiers relatifs.

Exercice 62 (donné à Philippe Cloarec et Marcus Hanzig). Prouver qu'il n'existe pas d'entiers strictement positifs k et m tels que $k! + 48 = 48(k + 1)^m$.

Exercice 63 (donné à Rémi Varloot). Si k est un entier, on note $p(k)$ le nombre de ses diviseurs pairs, et $i(k)$ le nombre de ses diviseurs impairs. Montrer que pour tout entier n , la somme des $p(k)$, où k est inférieur à n , diffère d'au plus n de la somme des $i(k)$.

Exercice 64 (donné à Jeanne Nguyen). Trouver tous les entiers n dont le nombre de diviseurs est $\sqrt[3]{4n}$.

Exercice 65 (donné à Camille Dessirier). Résoudre en nombres entiers l'équation $y^3 = x^3 + 8x^2 - 6x + 8$.

Exercice 66 (donné à Thomas Cruzel et Rémi Vergnaud). Pour quelles valeurs de n , le nombre $P_n = 36^n + 24^n - 7^n - 5^n$ est-il divisible par 899 ?

Exercice 67 (donné à Charlotte Le Mouel). Les entiers a et b sont premiers entre eux, avec $a > b$. Comparer les nombres :

$$m = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{b} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(b-1)a}{b} \right\rfloor$$

et :

$$n = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2b}{a} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{(a-1)b}{a} \right\rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x .

Exercice 68 (donné à Juliette Fournier). Trouver tous les entiers strictement positifs a et b tels que $ab^2 + b + 7$ divise $a^2b + a + b$.

Exercice 69 (donné à Jean-Alix David et William Fujiwara). Trouver tous les entiers naturels x, y et z vérifiant $3^x + 4^y = 5^z$.

Exercice 70 (donné à François Caddet et Dmitry Ivanov). Soient trois entiers a, b, c tels que $a^2 + b^2 + c^2$ soit divisible par 6 et $ab + bc + ca$ soit divisible par 3. Montrer que $a^3 + b^3 + c^3$ est divisible par 6.

Exercice 71 (donné à Jean-Denis Zafar). Soient m et n deux entiers premiers entre eux. Calculer le PGCD de $5^m + 7^m$ et $5^n + 7^n$.

Exercice 72 (donné à Marc Coiffier). Déterminer les entiers n tels que $n!$ soit divisible par $n + 2$?

Exercice 73 (donné à Florian Tep). Soient m et n strictement positifs tels que $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$. Montrer que $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$.

Exercice 74 (donné à Pierre Camilleri). À un entier n on associe le produit de tous ses diviseurs, qu'on appelle $f(n)$. Si $f(a) = f(b)$, a-t-on obligatoirement $a = b$?

9. Mathieu Aria, Lucas Boczkowski, Amélie Héliou, Vincent Langlet, Adrien Laroche, Ambroise Marigot, Christopher Wells et Thomas Williams

10. Lucas Boczkowski, Vincent Langlet, Adrien Laroche, Ambroise Marigot et Thomas Williams

2.2 Les solutions

Stratégies de base

Solution de l'exercice 1 (*Lerne Ordnung, liebe sie, Ordnung spart Dir Zeit und Müh.*). Soient $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{2n+1}$ ces nombres numérotés dans l'ordre croissant. La condition de l'énoncé donne en particulier $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} > x_{n+2} + \dots + x_{2n+1}$, puis

$$x_1 > (x_{n+2} + \dots + x_{2n+1}) - (x_2 + \dots + x_n) = (x_{n+2} - x_2) + \dots + (x_{2n+1} - x_n) \geq 0$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2. On numérote ces entiers dans l'ordre croissant : $a_1 < a_2 < \dots < a_7$. Séparons deux cas.

☞ Si $a_5 \geq 16$, alors $a_5 + a_6 + a_7 \geq 16 + 17 + 18 = 51$.

☞ Si $a_5 \leq 15$, alors $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 11 + 12 + 13 + 14 = 50$ et $a_5 + a_6 + a_7 = 100 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \geq 50$.

Solution de l'exercice 3. Sans perte de généralité, on peut supposer que $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_{2n} \leq n^2$. Supposons par l'absurde que trois différences $a_i - a_j$ quelconques ne sont jamais toutes les mêmes. En particulier,

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_1 &= (a_{2n} - a_{2n-1}) + (a_{2n-1} - a_{2n-2}) + \dots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) \\ &\geq 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \dots + (n-1) + (n-1) + n \\ &= 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Or, $a_{2n} - a_1 \leq n^2 - 1$: on aboutit à une contradiction.

Solution de l'exercice 4. Par récurrence : la relation est vérifiée pour $n = 1$, et si elle est vérifiée pour n , pour qu'elle soit vraie pour $n + 1$ il faut et il suffit que :

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= (1+2+\dots+(n+1))^2 - (1+2+\dots+n)^2 \\ &= (n+1)((1+2+\dots+n) + (1+2+\dots+(n+1))). \end{aligned}$$

Or (résultat classique) : $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$, donc $1+2+\dots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, leur somme vaut bien $(n+1)^2$, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 5. Considérons un triangle équilatéral de côté 1m. Parmi les trois sommets, deux au moins sont de même couleur, et ils sont distants de 1m.

Solution de l'exercice 6. Non, car si la somme de deux éléments a et b est égale au troisième $a + b$, la somme des trois éléments $2a + 2b$ est paire, et donc la somme des éléments des onze sous-ensembles devrait être paire. Ce qui n'est pas le cas de la somme $1 + 2 + \dots + 33 = \frac{33 \times 34}{2} = 561$.

Solution de l'exercice 7. Non : si l'on colorie les vingt cases du rectangle en noir et blanc comme sur un échiquier, chacune des pièces couvre deux cases blanches et deux cases noires, hormis la seconde qui couvre une case d'une couleur et trois de l'autre. Donc les cinq pièces, quelle que soit leur disposition, ne peuvent pas couvrir le même nombre de cases blanches que de cases noires.

Solution de l'exercice 8. Divisons notre carré en 25 cases carrées de côté $1/5$. Nécessairement l'une de ces cases contiendra trois des 51 points, d'après le principe des tiroirs. Or le cercle circonscrit à ladite case a pour rayon $\frac{\sqrt{2}}{10}$, ce qui est inférieur à $1/7$. Donc les trois points sont intérieurs au cercle de rayon $1/7$ et de centre le centre de la case carrée. On remarquera que ce cercle peut déborder le

carré initial : si l'on interdit aux cercles de déborder le carré initial, le résultat est faux, car il suffit de placer tous les points sur les bords du carré, à distance suffisante des sommets, pour remarquer que chacun d'eux ne peut appartenir qu'à un seul cercle inclus dans le carré.

Solution de l'exercice 9. Considérons l'ensemble des combinaisons de la forme $\sum \eta_i a_i$ pour $\eta_i \in \{0, 1\}$. Ceci fournit 1024 valeurs (deux choix pour chacun des η_i), dont au moins deux sont congrues modulo 1001 d'après le principe des tiroirs. La différence de ces deux valeurs est un multiple de 1001 et s'écrit comme le demande l'énoncé.

Solution de l'exercice 10. Montrons que si k cases sont noircies sur un quadrillage et forment un ensemble connexe, alors au plus $3k + 2$ cases sont soit noires, soit blanches et adjacentes à une case noire. On raisonne par récurrence sur k . Si $k = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai pour k cases noires, et donnons-en nous $k + 1$. On peut trouver une case noire telle que les k autres cases noircies forment un ensemble connexe. On le montrera plus bas. Cela étant acquis, la case noire à ajouter ayant nécessairement une frontière en commun avec une case déjà noire, elle n'ajoute qu'au plus trois cases dans l'ensemble des cases noires ou adjacentes à une case noire, ce qui conclut la récurrence. Cela montre que si k est le nombre de cases noires dans la situation qui nous occupe, on a $n^2 \leq 3k + 2$, ce qui conclut.

Pour montrer le résultat intermédiaire, il suffit de considérer deux cases noires à distance maximale (c'est-à-dire que le nombre de cases noires à traverser pour aller de l'une à l'autre est maximal). Le lecteur vérifiera qu'enlever une de ces deux cases laisse connexe l'ensemble des cases noires restantes.

Solution de l'exercice 11. On va montrer plus généralement que si l'on remplace le quadrillage de l'énoncé par un quadrillage $m \times n$, le nombre maximal de cases que l'on peut colorier en noir est m si $n = 1$, n si $m = 1$ et $m + n - 2$ si m et n sont strictement supérieurs à 1. En particulier, on trouve 1998 dans la situation de l'énoncé.

Le résultat est évident si m ou n est égal à 1. Si m et n sont tous les deux strictement supérieurs à 1, on peut colorier $m + n - 2$ cases en coloriant toutes les cases d'une ligne et d'une colonne sauf celle où elles s'intersectent. On va montrer par récurrence sur m qu'il est impossible de faire mieux. On peut supposer $n \geq m$.

On a déjà traité le cas $m = 1$. Si $m = 2$, si l'on colorie deux cases dans la même ligne, on ne peut plus rien colorier ensuite. Le maximum est donc atteint quand on colorie une colonne en entier, d'où le résultat. Supposons $m > 2$, et donnons-nous un coloriage du nombre maximum de cases. Puisque le maximum est au moins $m + n - 2$, on dispose d'une ligne qui contient deux cases noires au moins. Il n'y a aucune autre case noire dans les deux colonnes qui contiennent ces deux cases. Considérons les $m - 2$ colonnes restantes. Si $m > 3$, par hypothèse de récurrence, elles contiennent au plus $m + n - 4$ cases noires, ce qui conclut. Si $m = 3$, la colonne restante ne peut pas être entièrement remplie, ce qui conclut de même.

Solution de l'exercice 12. La réponse est $(\frac{2007}{3})^3 = 669^3$, obtenue en prenant la suite formée de 669 fois le nombre 1, 669 fois le nombre 2 et 669 fois le nombre 3. On le montre par étape. Soit x_1, \dots, x_n une suite réalisant ce maximum.

On peut tout d'abord supposer la suite croissante. En effet, échanger deux termes consécutifs qui sont dans l'ordre décroissant ne peut qu'augmenter le nombre des sous-suites que l'on désire. Ensuite, on peut supposer que deux termes consécutifs de la suite ne diffèrent que d'au plus 1. En effet, si $x_i = X_{i-1} + a$, avec $a \geq 2$, soustraire $a - 1$ à tous les termes de la suite à partir de x_i ne peut qu'augmenter le nombre des sous-suites que l'on cherche.

On peut donc supposer que la suite est constituée de a_1 fois le nombre 1, a_2 fois le nombre 2, etc., jusqu'à a_r fois le nombre r , la somme des a_i valant 2007. Le nombre des sous-suites cherchées est $a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \dots + a_{r-2} a_{r-1} a_r$. On voit immédiatement que l'on a $a_{r-2} \geq a_{r-1} \geq a_r$. Ainsi, si $r \geq 4$,

remplacer tous les r par des $r - 1$ augmente le nombre des sous-suites cherchées. On a donc $r = 3$. Appliquant l'inégalité arithmético-géométrique, on trouve qu'il faut que la suite comporte autant de 1 que de 2 et de 3. Cela conclut.

Solution de l'exercice 13. Soient b_i le nombre de dominos horizontaux dont le carré blanc est à gauche et sur la colonne i , et n_i le nombre de ceux dont le carré noir est à gauche et sur la colonne i . On a $b_1 = n_1$. En effet, la première colonne contient autant de cases blanches que de cases noires, et un domino vertical recouvre autant de blanc que de noir. De même, l'examen de la colonne 2 montre que $b_1 + n_2 = n_1 + b_2$, d'où $b_2 = n_2$. Continuant, on trouve que l'on a $b_i = n_i$ pour tout i . La somme des b_i est donc égale à celle des n_i , ce qui conclut.

Solution de l'exercice 14. Supposons que l'on a joué de façon à obtenir la configuration de l'énoncé. Puisque le cube numéroté 27 revient à sa place, on a joué un nombre pair de coups. Mais la permutation des cubes de 1 à 26 que l'on a obtenue est impaire, étant composée de 13 transpositions. Ce raisonnement montre qu'il est en fait impossible d'obtenir la configuration de l'énoncé.

Solution de l'exercice 15. Numérotons les maisons de 1 à 12 en respectant l'ordre des aiguilles d'une montre. À une coloration des maisons, associons le nombre binaire dont le k -ième chiffre est 1 si la maison est bleue et 0 si la maison est rouge. Un calcul immédiat montre que l'action du k -ième peintre est d'ajouter à ce nombre 2^{k-1} et d'éventuellement lui enlever $2^{12} - 1$. Ainsi, une fois que tous les peintres sont passés, ce nombre n'a pas changé modulo $2^{12} - 1$. Mais les nombres que l'on peut obtenir sont tous compris entre 0 et $2^{12} - 1$. Les nombres du début et de la fin sont donc égaux, à moins peut-être que le premier soit $2^{12} - 1$ et le dernier 0 (en effet, le premier nombre est au moins égal à 1, puisque au moins une maison est bleue). Ce cas est celui où toutes les maisons sont bleues au départ. Il est immédiat de vérifier pour lui le résultat de l'exercice.

Solution de l'exercice 16. La réponse est 100. On peut ne faire que 100 coups en transformant une ligne sur deux puis une colonne sur deux. On ne peut pas faire moins car inverser les couleurs d'un rectangle ne peut changer que d'au plus 4 le nombre de séparations entre cases blanches et noires sur le bord de l'échiquier et que les rectangles contenant un coin ne le change que d'au plus 2.

Solution de l'exercice 17. On suppose que chaque grand-père a au plus 13 petits-enfants. Soit A un des grands-pères. Ses petits enfants forment un ensemble S à $s \leq 13$ éléments. Soit x l'un d'entre eux. Il y a au moins sept enfants dans la cour qui ne sont pas des petits-enfants de A . Si y est l'un d'entre eux, l'hypothèse de l'énoncé implique que x et y ont un grand-père commun, que l'on appelle B . C'est le second grand-père de x , qui est donc grand-père de tous les enfants qui ne sont pas dans S . Soit t le nombre de petits-enfants de B . Soit C le deuxième grand-père de y , et soit u le nombre de ses petits-enfants. Notons t' et u' les nombres respectifs de petits-enfants de B et de C qui sont dans S . Comme u' est non nul, le raisonnement précédent montre que l'on a $t = t' + 20 - s$ et $u = u' + 20 - s$. On a enfin $t' + u' = s$, d'où $s + t + u = 40$, ce qui implique que l'un des entiers s , t et u vaut au moins 14, et conclut.

Solution de l'exercice 18. On se ramène à prouver qu'il existe un point P tel que la somme x_P des degrés des sommets reliés à P vaille au moins $\frac{4k^2}{n^2}$. Mais la somme des x_P est égale à la somme des carrés des degrés des sommets du graphe. Comme la somme des degrés vaut $2k$, on conclut par l'inégalité entre moyennes quadratique et arithmétique.

Solution de l'exercice 19. L'énoncé implique que si l'on translate l'ensemble de ces disques de 0,02, le nouvel ensemble de disques est disjoint du premier. On peut notamment translater cet ensemble de deux vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} faisant un angle de 60° : le premier ensemble de disques sera disjoint du deuxième et du troisième. Mais le deuxième et le troisième seront eux aussi disjoints l'un de l'autre, car on peut passer de l'un à l'autre par une troisième translation de 0,02 de vecteur \vec{BC} , ABC étant un

triangle équilatéral. Les trois ensembles de disques ainsi obtenus ne sont pas tous trois dans le carré initial, mais dans un carré un peu plus grand, de côté 1,02. Comme par ailleurs ces ensembles sont deux à deux disjoints, la somme de leurs aires (qui n'est autre que le triple de chacune des aires) est inférieure ou égale à l'aire du grand carré, soit $1,02^2 < 1,05$. Il en résulte que l'aire de la réunion des disques initiaux est strictement inférieure à $\frac{1,05}{3} = 0,35$.

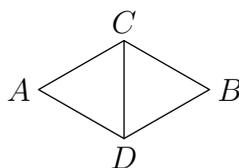
Solution de l'exercice 20. Vert. En effet, la différence du nombre de caméléons jaunes et du nombre de caméléons rouges est toujours multiple de 3 : si un caméléon jaune rencontre un vert, cette différence diminue de 3, car il y a un jaune de moins et deux rouges de plus ; si un rouge rencontre un vert, elle augmente de 3. Par contre, si un jaune rencontre un rouge, la différence reste inchangée, car le nombre de jaunes et le nombre de rouges diminuent chacun d'un. Et si deux caméléons de même couleur se rencontrent, la différence reste également inchangée. Comme, au départ, la différence $7 - 10 = -3$ est un multiple de 3, elle sera toujours un multiple de 3 : on ne peut pas en dire autant de la différence du nombre de verts et du nombre de rouges, car celle-ci, au départ, n'est pas un multiple de 3 : $17 - 10 = 7$ est de la forme $3k + 1$, donc elle restera toujours de cette forme. Tout comme la différence du nombre de verts et du nombre de jaunes. S'il y avait 34 jaunes et 0 rouge, la différence du nombre de jaunes et du nombre de rouges ne serait pas multiple de 3 ; de même s'il y avait 34 rouges et 0 jaune. Donc la couleur de tous les caméléons après un an ne peut être que le vert. Pour prouver qu'il est possible que tous les caméléons deviennent verts, il faut trouver une suite de rencontres qui mène à cette situation : si les 7 jaunes rencontrent 7 des rouges, il restera 3 rouges et 31 verts. Un des verts rencontre un rouge, il restera 2 jaunes, 2 rouges et 30 verts. Puis les deux rouges rencontrent les deux jaunes.

Solution de l'exercice 21. Soit n le nombre de stagiaires. Chaque stagiaire connaît entre 0 et $n - 1$ autres stagiaires. Mais il n'est pas possible qu'un stagiaire A connaisse 0 stagiaire si un autre B connaît $n - 1$ stagiaires, car B connaîtrait A ce qui impliquerait que A connaîtrait au moins un stagiaire, B . Le nombre de stagiaires connus varie donc soit de 1 à $n - 1$, soit de 0 à $n - 2$, il ne peut prendre que $n - 1$ valeurs alors qu'il y a n stagiaires : d'après le principe des tiroirs, pour au moins deux stagiaires il prend la même valeur.

Solution de l'exercice 22. À chaque coup, on ajoute une pile, et on supprime un jeton : la somme du nombre de piles et du nombre de jetons est donc invariante, égale à 1002. Or si l'on a n piles de 3 jetons, cela fait $3n$ jetons et l'invariant vaut $4n$, qui ne peut pas être égal à 1002, d'où l'impossibilité.

Solution de l'exercice 23. Le nombre de positions distinctes du Rubik's cube est fini. Donc si l'on répète un nombre suffisant de fois une même combinaison de mouvements, quelle qu'elle soit, une de ces positions se répétera (mais pas nécessairement la position initiale). Seulement les mouvements du Rubik's Cube peuvent se faire dans les deux sens : si, après n répétitions de la même combinaison de mouvements, on atteint la même position P qu'après m répétitions (en supposant $n > m$), après $n - 1$ répétitions, on obtient également la même position qu'après $m - 1$ répétitions, car il existe une seule position qui, par cette combinaison de mouvements, mène à la position P . Donc après $n - 2$ répétitions, on a la même position qu'après $m - 2$ répétitions, et plus généralement après $n - k$ répétitions, la même combinaison qu'après $m - k$ répétitions. En particulier, après $n - m$ répétitions, on atteindra la même position qu'après $m - m = 0$ répétitions, donc la position initiale.

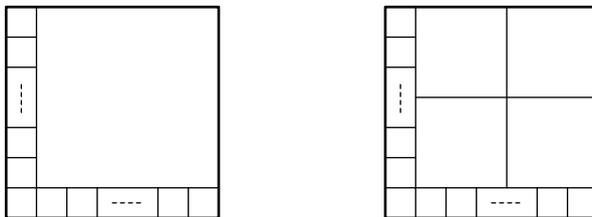
Solution de l'exercice 24. On part de deux points A et B distants de $\sqrt{3}$ et on suppose qu'ils ont des couleurs différentes. On construit les points C et D de telle sorte que CDA et CDB soient équilatéraux de côté 1 comme le montre la figure suivante :



Comme A et B sont de couleur différente, soit l'un des deux a la couleur de C ou D , soit C et D ont la même couleur. Dans tous les cas on a trouvé deux points à distance 1 de même couleur. On peut donc supposer que deux points quelconques distants de $\sqrt{3}$ ont la même couleur. Ainsi, si O est un point fixé du plan, le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$ est unicolore et il est clair que l'on peut trouver deux points à distance 1 sur ce cercle.

Solution de l'exercice 25. Tout d'abord, ce n'est pas possible pour $n = 2$ ou 3. En effet, dans ce cas, par le principe des tiroirs, un des carrés devrait contenir deux coins du grand carré et donc recouvrir à lui tout seul ce grand carré, ne laissant plus de place à ses frères.

Pour $n = 1$, c'est bien entendu possible. Aussi, pour tout entier $k \geq 1$, les deux configurations suivantes montrent que c'est possible pour les entiers de la forme $n = 2k + 2$ et $n = 2k + 5$:



où il y a $k + 1$ carrés sur la ligne du bas et également $k + 1$ sur la colonne de gauche.

Il ne reste plus que $n = 5$. Dans ce cas, on est contraint de mettre un carré dans chaque coin, et on voit qu'il est impossible que la forme restante soit encore un carré. Le pavage est donc impossible dans ce cas.

Solution de l'exercice 26. Oui, et cela se prouve par récurrence. Pour la valeur initiale $n = 1$, il est clair qu'un carré de deux cases privé d'une case quelle qu'elle soit peut être précisément couvert par une pièce du type voulu (que nous appellerons désormais une pièce P). Supposons le résultat vrai pour n . Pour $n + 1$, le carré de côté 2^{n+1} peut être divisé en quatre carrés de côté 2^n . L'un d'eux contient la case exclue, et par hypothèse de récurrence, il peut, privé de ladite case, être pavé par des pièces P . Pour les trois autres, on exclut la case d'angle qui touche le centre du grand carré. Privés de cette case, ils peuvent également, d'après l'hypothèse de récurrence, être pavés par des pièces P . Et les trois cases centrales ainsi exclues peuvent elles aussi être couvertes par une pièce P , ce qui achève la preuve par récurrence.

Solution de l'exercice 27. Par une étude exhaustive, on montre qu'à partir d'un certain rang, les a_n se terminent périodiquement par 2, 4, 8, 6, ... Ainsi à partir d'un certain rang, $a_{n+4} = a_n + 2 + 4 + 8 + 6 = a_n + 20$. Une suite extraite de a_n est donc arithmétique de raison 20. Les puissances de 2 modulo 20 sont 2 puis cycliquement 4, 8, 16 et 12. Mais par ce qui précède, les termes sont successivement congrus modulo 20 soit à 2, 4, 8 et 16 (premier cas), soit à 12, 14, 18 et 6 (second cas). Dans le premier cas, il y a à partir d'un moment par exemple tous les entiers congrus à 4 modulo 20 et donc une infinité de puissances de 2. Dans le second cas, on remplace 4 par 12 dans l'argument.

Solution de l'exercice 28. Oui, par récurrence : $1^3 = 1$ se termine par une fois le chiffre 1. Montrons que s'il existe un entier a_n de n chiffres dont le cube se termine par n fois le chiffre 1, on peut en déduire un entier a_{n+1} de $n + 1$ chiffres dont le cube se termine par $n + 1$ fois le chiffre 1. Appelons b_n le $(n + 1)$ -ième chiffre à partir de la droite de a_n^3 , tous les chiffres suivants étant des 1. Posons $a_{n+1} = a_n + c_n 10^n$, c_n étant en fait le premier chiffre de a_{n+1} :

$$a_{n+1}^3 = a_n^3 + 3a_n^2 c_n 10^n + 3a_n c_n^2 10^{2n} + c_n^3 10^{3n}.$$

Or le dernier chiffre de a_n est 1 (sinon son cube ne se terminerait pas par 1), le $(n + 1)$ -ième chiffre de a_{n+1}^3 est le même que le dernier chiffre de $b_n + 3c_n$. Quel que soit b_n , il existe un c_n tel que $b_n + 3c_n$ se termine par 1 car $3c_n$ prend toutes les valeurs modulo 10. Il est ainsi possible, par récurrence, de construire un nombre a_n de n chiffres dont le cube se termine par n chiffres 1, pour tout n .

Géométrie

Solution de l'exercice 29. Si \vec{u} et \vec{v} sont des vecteurs de coordonnées respectives (x, y) et (z, t) , on note $[\vec{u}, \vec{v}]$ leur déterminant, c'est-à-dire le nombre $xt - yz$. On utilise la propriété suivante : l'aire (orientée) du parallélogramme déterminé par \vec{u} et \vec{v} est $[\vec{u}, \vec{v}]$.

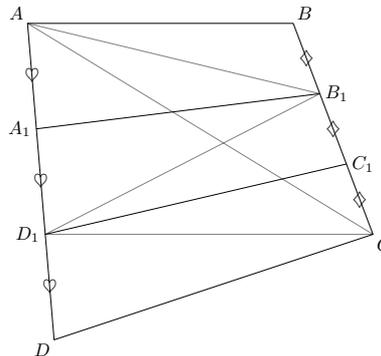
Soit O un point quelconque du plan. Notons $|A''B''C''|$ l'aire du triangle $A''B''C''$. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 2|A''B''C''| &= [\vec{OA''}, \vec{OB''}] + [\vec{OB''}, \vec{OC''}] + [\vec{OC''}, \vec{OA''}] \\
 &= [\vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OA'}, \vec{OC} + \vec{OA} - \vec{OB'}] \\
 &\quad + [\vec{OC} + \vec{OA} - \vec{OB'}, \vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC'}] \\
 &\quad + [\vec{OA} + \vec{OB} - \vec{OC'}, \vec{OB} + \vec{OC} - \vec{OA'}] \\
 &= [\vec{OA'}, \vec{OB'}] + [\vec{OB'}, \vec{OC'}] + [\vec{OC'}, \vec{OA'}] \\
 &\quad + ([\vec{OA'}, \vec{OB}] + [\vec{OB}, \vec{OC}] + [\vec{OC}, \vec{OA'}]) \\
 &\quad + ([\vec{OB'}, \vec{OC}] + [\vec{OC}, \vec{OA}] + [\vec{OA}, \vec{OB'}]) \\
 &\quad + ([\vec{OC'}, \vec{OA}] + [\vec{OA}, \vec{OB}] + [\vec{OB}, \vec{OC'}]) \\
 &= [\vec{OA'}, \vec{OB'}] + [\vec{OB'}, \vec{OC'}] + [\vec{OC'}, \vec{OA'}] + 0 + 0 + 0 \\
 &= 2|A'B'C'|
 \end{aligned}$$

qui est bien ce que l'on voulait.

Solution de l'exercice 30.

Méthode 1. On commence par traiter un problème plus simple. Étant donnée la figure suivante

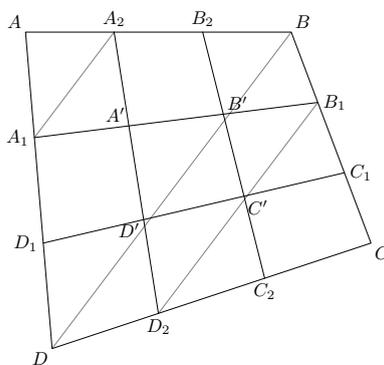


on montre que l'aire de $A_1B_1C_1D_1$ est le tiers de celle de $ABCD$. Puisque les triangles CC_1D_1 et $B_1C_1D_1$ ont une hauteur en commun et la base correspondante de même longueur, ils ont même aire. De même pour les triangle $A_1B_1D_1$ et AA_1B_1 . D'autre part le triangle DD_1C a pour aire le tiers de celle de ADC puisque ces triangles ont même hauteur et que les bases correspondantes sont dans un rapport $\frac{1}{3}$. De même l'aire de ABB_1 est le tiers de celle de ABC . Ainsi :

$$\begin{aligned}
 |ABCD| &= |DD_1C| + |CC_1D_1| + |B_1C_1D_1| + |A_1B_1D_1| + |AA_1B_1| + |ABB_1| \\
 &= \frac{1}{3}|ADC| + 2|B_1C_1D_1| + 2|A_1B_1D_1| + \frac{1}{3}|ABC| \\
 &= \frac{1}{3}|ABCD| + 2|A_1B_1C_1D_1|
 \end{aligned}$$

d'où la conclusion.

Revenons à la situation d'origine, et nommons les points comme sur la figure ci-dessous.



Pour conclure, en appliquant deux fois le résultat préliminaire, il suffit de montrer que A' est au tiers du segment $[A_2D_2]$, et d'autres résultats similaires qui s'obtiennent de la même manière. D'après le théorème de Thalès, les droites (A_1A_2) , (BD) et (B_1D_2) sont parallèles, $A_1A_2 = \frac{1}{3}BD$, et $B_1D_2 = \frac{2}{3}BD$. Pour conclure, on applique une dernière fois le théorème de Thalès dans les triangles A_1A_2A' et B_1D_2A' .

Méthode 2. La deuxième méthode est plus calculatoire, et utilise les relations entre aires et déterminants (voir solution de l'exo 29). Soit O un point quelconque du plan. Des considérations barycentriques donnent $\overrightarrow{OA'} = (4\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD})/9$ et $\overrightarrow{OC'} = (4\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OD})/9$. De ces deux égalités, on déduit que $\overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. De même, $\overrightarrow{B'D'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$. Or, l'aire de $ABCD$ est égale à $\frac{1}{2}[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]$ et celle de $A'B'C'D'$ à $\frac{1}{2}[\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'D'}]$. On en déduit le résultat annoncé.

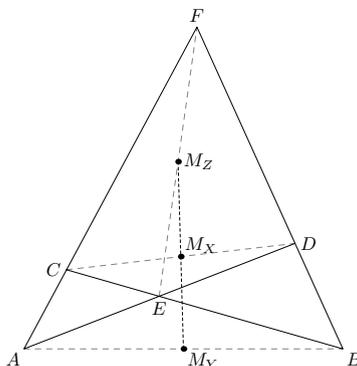
Solution de l'exercice 31. On note $|GIC|$ l'aire du triangle GIC et $[\vec{u}, \vec{v}]$ le déterminant de \vec{u} et \vec{v} (voir solution de l'exercice 29). On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} |GIC| &= \frac{1}{2} |[\vec{IG}, \vec{IC}]| = \frac{1}{2} \left| \left[\frac{\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC}}{3}, \vec{IC} \right] \right| \\ &= \frac{1}{6} |[\vec{IA}, \vec{IC}] + [\vec{IB}, \vec{IC}]| = \frac{1}{6} |ar - br| \\ &= \frac{|a-b|r}{6}, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 32. On note $[\vec{u}, \vec{v}]$ le déterminant de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} (voir solution de l'exo 29).

Fixons des notations comme sur la figure suivante, où M_X , M_Y et M_Z sont respectivement les milieux de $[CD]$, $[AB]$ et $[EF]$:

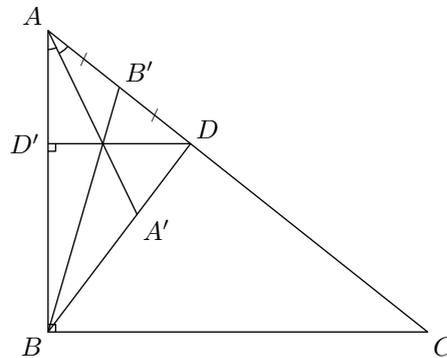


Soit O un point quelconque du plan. Remarquons que trois points R, S, T sont alignés si et seulement si $[\vec{OR}, \vec{OS}] + [\vec{OS}, \vec{OT}] + [\vec{OT}, \vec{OR}] = 0$. Calculons :

$$\begin{aligned} & [\vec{OM}_X, \vec{OM}_Y] + [\vec{OM}_Y, \vec{OM}_Z] + [\vec{OM}_Z, \vec{OM}_X] \\ = & \left[\frac{\vec{OC} + \vec{OD}}{2}, \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} \right] + \left[\frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}, \frac{\vec{OE} + \vec{OF}}{2} \right] + \left[\frac{\vec{OE} + \vec{OF}}{2}, \frac{\vec{OC} + \vec{OD}}{2} \right] \\ = & \frac{1}{4} \left(([\vec{OA}, \vec{OE}] + [\vec{OE}, \vec{OD}] + [\vec{OD}, \vec{OA}]) \right. \\ & + ([\vec{OB}, \vec{OE}] + [\vec{OE}, \vec{OC}] + [\vec{OC}, \vec{OB}]) \\ & + ([\vec{OA}, \vec{OF}] + [\vec{OF}, \vec{OC}] + [\vec{OC}, \vec{OA}]) \\ & \left. + ([\vec{OB}, \vec{OF}] + [\vec{OF}, \vec{OD}] + [\vec{OD}, \vec{OB}]) \right) = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que M_X, M_Y et M_Z sont alignés.

Solution de l'exercice 33. Utilisons le théorème de Ceva : appelons B' le pied de la médiane issue de B , donc le milieu de $[AD]$, A' le pied de la bissectrice issue de A et D' le pied de la hauteur issue de D .

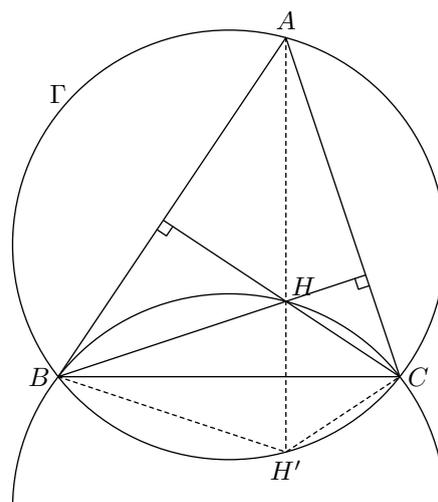


Par définition, $\frac{B'D}{B'A} = -1$. Une propriété classique de la bissectrice du triangle est que $\frac{A'B}{A'D} = \frac{AB}{AD}$. En effet $\frac{A'D}{AD} = \frac{\sin \widehat{A'AD}}{\sin \widehat{AA'D}} = \frac{\sin \widehat{AA'B}}{\sin \widehat{A'AB}} = \frac{A'B}{AB}$. Enfin, le théorème de Thalès donne $\frac{D'A}{D'B} = \frac{DA}{DC}$ vu que (DD') et (BC) sont parallèles, puisque tous deux perpendiculaires à (AB) . Il en résulte :

$$\frac{B'D}{B'A} \cdot \frac{A'B}{A'D} \cdot \frac{D'A}{D'B} = -\frac{AB}{AD} \cdot \frac{DA}{DC} = -1$$

(puisque par hypothèse $DC = AB$), ce qui prouve bien que les trois droites sont concourantes.

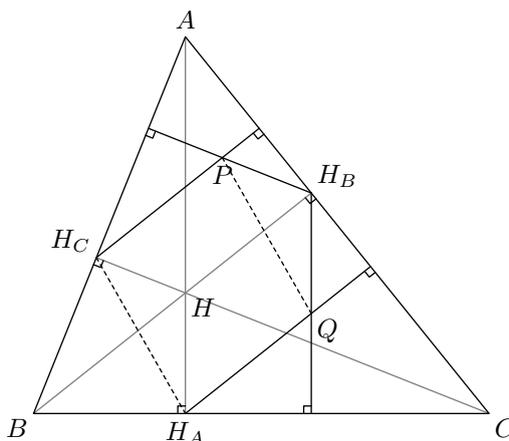
Solution de l'exercice 34.



Comme (HB) est orthogonal à (AC) et (HC) à (AB) , l'angle de droites (HB, HC) est le même que l'angle de droites (AC, AB) . La symétrie par rapport à (BC) transforme H en H' , et transforme l'angle (HB, HC) en $(H'B, H'C) = -(HB, HC) = (AB, AC)$, car l'angle dont il faut faire tourner (AB) pour atteindre (AC) est opposé à l'angle dont il faut faire tourner (AC) pour atteindre (AB) , et toute symétrie axiale transforme un angle en l'angle opposé. La relation $(H'B, H'C) = (AB, AC)$ équivaut à la cocyclicité de H', B, C et A , d'où il résulte que H décrit le symétrique Γ' du cercle Γ par rapport à (BC) .

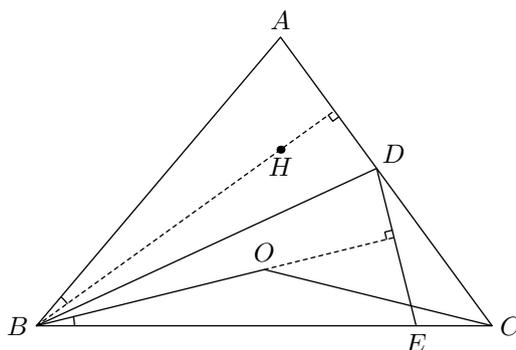
Pour prouver que H décrit tout le cercle, on remarque que si H est l'orthocentre de ABC , A est l'orthocentre de HBC , donc à tout point H de Γ' on peut associer un point A de Γ , en l'occurrence l'orthocentre de HBC , tel que H soit l'orthocentre de ABC .

Solution de l'exercice 35. On commence par faire une figure :

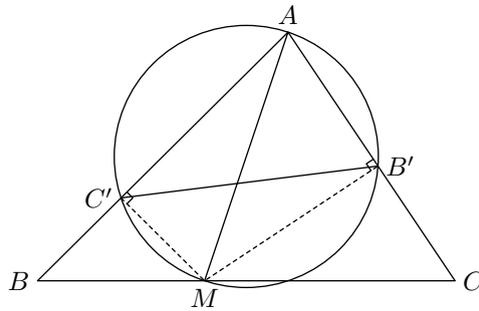


Les droites (HH_A) et (H_BQ) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à (BC) , et de même (HH_B) et (H_AQ) sont parallèles : HH_AQH_B est donc un parallélogramme et les vecteurs $\overrightarrow{HH_B}$ et $\overrightarrow{H_AQ}$ sont égaux. De même, $\overrightarrow{HH_B} = \overrightarrow{H_CP}$. Il en résulte $\overrightarrow{H_CP} = \overrightarrow{H_AQ}$ et donc que H_AQPH_C est également un parallélogramme. Ainsi les vecteurs \overrightarrow{PQ} et $\overrightarrow{H_CH_A}$ sont égaux, et *a fortiori* de même longueur.

Solution de l'exercice 36. Le triangle ABE étant isocèle, par hypothèse, et (BD) étant la bissectrice de l'angle en \hat{B} , donc l'axe de symétrie de ce triangle isocèle, la symétrie par rapport à (BD) transforme (DA) en (DE) . Or, si l'on appelle H l'orthocentre de ABC , l'angle HBA vaut $\frac{\pi}{2} - \hat{A}$, tout comme l'angle \widehat{OBC} car le triangle OBC est isocèle avec $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$. Donc la symétrie par rapport à la bissectrice (BD) transforme (BH) en (BO) : puisque (BH) est perpendiculaire à (DA) , son symétrique (BO) est perpendiculaire à (DE) , symétrique de (DA) . Ceci achève la démonstration.



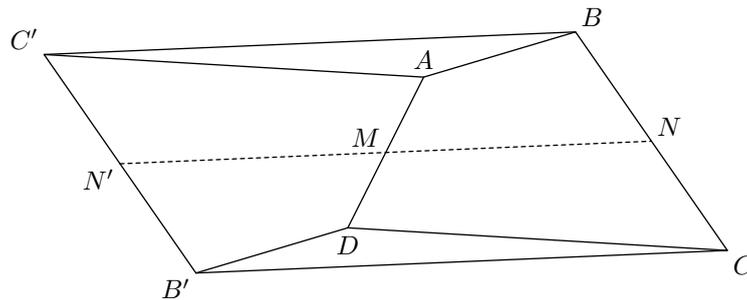
Solution de l'exercice 37. Etant donné les angles droits, le cercle de diamètre $[AM]$ passe par B' et C' , et l'angle $\widehat{B'AC'}$ est constant, égal à \widehat{BAC} .



Ainsi $B'C' = AM \sin \widehat{BAC}$. Il en résulte que $B'C'$ est minimal lorsque AM est minimal, donc lorsque M est la projection H de A sur (BC) : pour toute autre position de M , l'hypoténuse AM de AMH est strictement plus longue que AH . Si H n'appartient pas au segment $[BC]$, le minimum est atteint en l'un des points B ou C , le plus proche de H : cela résulte du théorème de Pythagore.

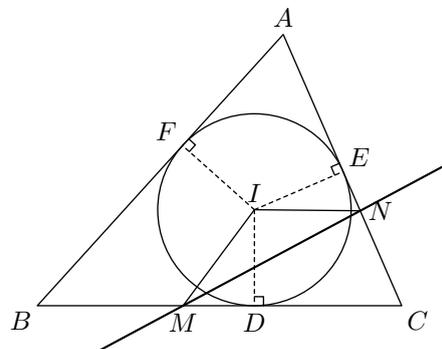
Solution de l'exercice 38. Vectoriellement, on remarque que le vecteur \overrightarrow{MN} est la demi-somme des vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} . Il faut donc prouver que $\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\| = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{CD}\|$ seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires, ce qui est évident en élevant au carré : $AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot CD \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot CD$ si et seulement si $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 1$.

Mais on peut aussi voir cela géométriquement. La symétrie par rapport à M transforme A en D , B en un point B' et C en un point C' tel que $B'C'$ soit parallèle à BC , et de même longueur.



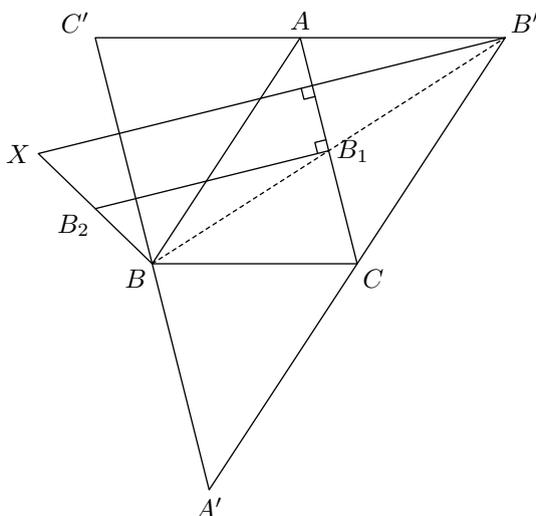
Elle transforme N en un point N' , milieu de $[B'C']$. Donc $NN'C'B$ et $NN'B'C$ sont des parallélogrammes. Il en résulte que $2MN = NN' = C'B = B'C$. Par ailleurs, $[B'D]$ est symétrique de $[BA]$, donc de même longueur (toujours pour la seule raison que la symétrie par rapport à N est une isométrie), tout comme $[C'A]$ est de même longueur que $[CD]$. Or dans le triangle $B'DC$, $B'C \leq B'D + DC$ en vertu de l'inégalité triangulaire, ce qui entraîne $2 \cdot MN \leq AB + CD$. L'égalité n'a lieu que lorsque les trois points B', D, C sont alignés, donc lorsque (BA) et (CD) sont parallèles.

Solution de l'exercice 39. Une telle droite coupe deux des côtés, par exemple $[BC]$ et $[AC]$, en M et N respectivement.



Si l'on pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $x = CM$, $y = CN$ et $z = MN$, le périmètre de CMN vaut $x + y + z$ et celui de $MNAB$ vaut $z + (b - y) + c + (a - x)$. Ces deux périmètres sont égaux si et seulement si $x + y = \frac{a+b+c}{2}$. Or si l'on appelle I le centre du cercle inscrit, r son rayon et S l'aire du triangle ABC , l'aire du triangle IMC , de hauteur $ID = r$ et de base $MC = x$, vaut $\frac{xr}{2}$. De même, l'aire du triangle INC vaut $\frac{yr}{2}$, donc l'aire du quadrilatère $MINC$ vaut $r \frac{x+y}{2}$. Les aires des triangles IBC , ICA , IAB valent respectivement $\frac{ar}{2}$, $\frac{br}{2}$ et $\frac{cr}{2}$, si bien que l'aire du triangle ABC vaut $\frac{r(a+b+c)}{2}$. Si $x + y = \frac{a+b+c}{2}$, c'est-à-dire si les polygones CMN et $MNAB$ ont même périmètre, l'aire du quadrilatère $MINC$ vaut $\frac{S}{2}$. Pour que le triangle CMN ait pour aire $\frac{S}{2}$, il faut que le triangle IMN ait une aire nulle, donc que I appartienne à $[MN]$.

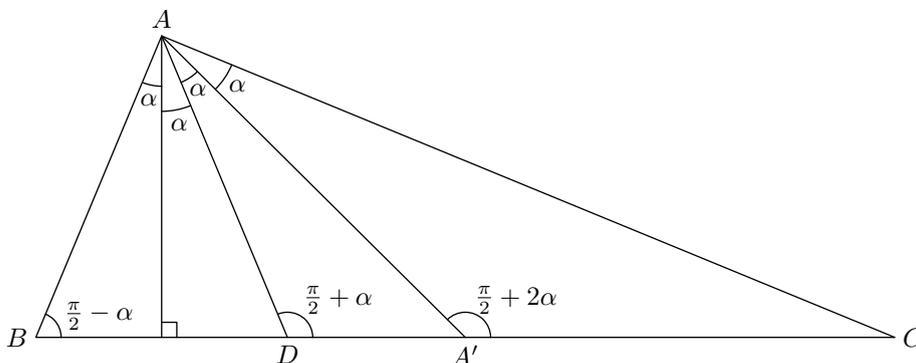
Solution de l'exercice 40. Faisons une figure :



La première relation équivaut à $XA^2 - XC^2 = BC^2 - BA^2$. En utilisant les vecteurs, $\overrightarrow{XA}^2 - \overrightarrow{XC}^2$ est le produit scalaire $(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}) \cdot (\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XC})$. Or si l'on appelle B_1 le milieu de $[AC]$, $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = 2\overrightarrow{XB_1}$, et $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{CA}$. D'où $2\overrightarrow{XB_1} \cdot \overrightarrow{CA} = 2B_1\overrightarrow{AC}$, et finalement $(\overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{BB_1}) \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Si B_2 est le milieu de $[XB]$, cette dernière relation équivaut à $\overrightarrow{B_2B_1} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$, soit (B_2B_1) perpendiculaire à (CA) .

Or l'homothétie de centre B et de rapport 2 transforme B_2 en X et B_1 en un point B' , symétrique de B par rapport au milieu de $[AC]$: (XB') doit donc être perpendiculaire à (AC) . De la même manière, en définissant A' (resp. C') comme le symétrique de A par rapport au milieu de $[BC]$ (resp. $[AB]$), (XA') doit être perpendiculaire à (BC) , et (XC') à (AB) . Or ABC est le triangle des milieux de $A'B'C'$: (AB) est parallèle à $(A'B')$, (BC) à $(B'C')$ et (CA) à $(C'A')$, si bien que X doit être sur les trois hauteurs de $A'B'C'$. L'unique point vérifiant les deux égalités est l'orthocentre de $A'B'C'$.

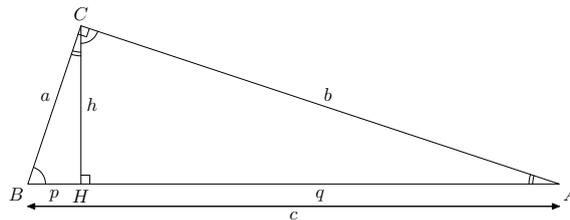
Solution de l'exercice 41. Si l'on appelle D le pied de la bissectrice, A' le milieu de $[BC]$, il est facile de voir que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\widehat{ADC} = \frac{\pi}{2} + \alpha$ et $\widehat{AA'C} = \frac{\pi}{2} + 2\alpha$. Les autres angles s'en déduisent élémentairement.



Si l'on utilise le fait que A' est le milieu de $[BC]$, la loi des sinus dans le triangle $AA'C$ donne $\frac{A'C}{AC} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\frac{\pi}{2} + 2\alpha)}$, alors que dans le triangle ABC , la même loi des sinus donne $\frac{BC}{AC} = \frac{\sin(4\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)}$. Donc $\frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha)}{\cos(2\alpha) \sin(4\alpha)} = \frac{1}{2}$. Comme $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ et $\sin(4\alpha) = 2 \sin(2\alpha) \cos(2\alpha)$, on trouve finalement $2 \cos^2(2\alpha) = 1$ d'où $\alpha = \frac{\pi}{8}$. Le triangle ABC est donc rectangle en A .

Une manière plus rapide d'atteindre ce résultat est de remarquer que dans tout triangle, si O est le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre, O et H sont isogonaux, ce qui signifie que les angles \widehat{HAB} et \widehat{CAO} sont égaux. Il résulte donc de la figure que O appartient à la médiane (AA') . Or O appartient aussi à la médiatrice de $[BC]$, qui ne coupe la médiane qu'au point A' . Donc le centre du cercle circonscrit est le milieu de $[BC]$, ce qui entraîne que le triangle est rectangle en A .

Solution de l'exercice 42. Notons les angles égaux sur la figure :



On remarque que les triangles ABC , CBH et ACH sont semblables. On en déduit les proportions :

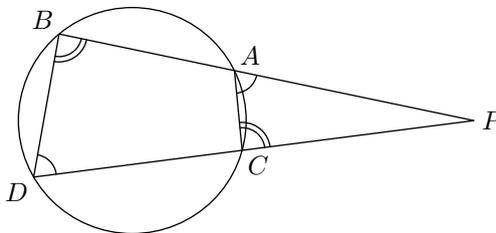
$$\frac{a}{p} = \frac{b}{h} = \frac{c}{a}, \quad \frac{a}{h} = \frac{b}{q} = \frac{c}{b}, \quad \frac{p}{h} = \frac{h}{q} = \frac{a}{b}$$

qui donnent directement les égalités $a^2 = pc$, $b^2 = qc$ et $h^2 = pq$. L'égalité $a^2 + b^2 = c^2$ s'obtient par somme des deux premières.

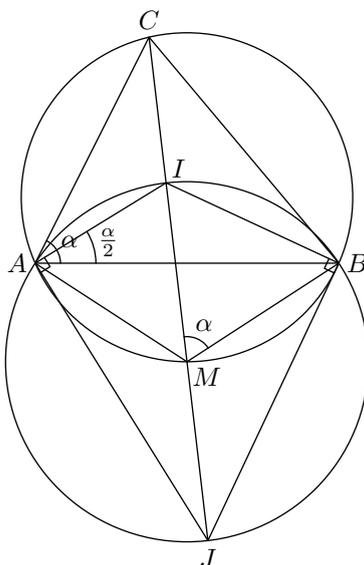
Solution de l'exercice 43. À l'aide du théorème de l'angle inscrit, on montre facilement que les triangles PBD et PCA sont semblables. Ceci nous donne

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

c'est-à-dire $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. (Remarque : cette valeur commune, qui ne dépend que de P et du cercle, s'appelle la *puissance de P par rapport au cercle*.)

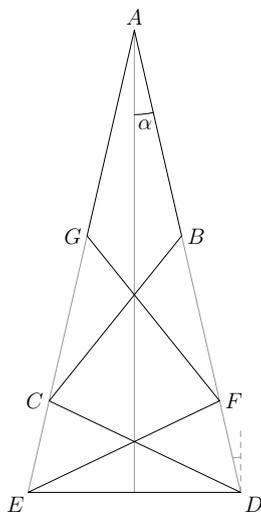


Solution de l'exercice 44. Faisons une figure.



Tout d'abord, M étant le milieu de l'arc \widehat{AB} , (CM) est la bissectrice de \widehat{ACB} . Notons α l'angle \widehat{BAC} . D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{BMC} = \alpha$, puis $\widehat{BAI} = \frac{\alpha}{2}$. Donc (AI) est la bissectrice de \widehat{BAC} . Ceci montre que I est le centre du cercle inscrit. Enfin, $[IJ]$ étant un diamètre du cercle Γ' , les angles \widehat{JAI} et \widehat{IBJ} sont droits ; or, les bissectrices extérieures sont perpendiculaires aux bissectrices intérieures. On en déduit que J est le centre d'un cercle exinscrit.

Solution de l'exercice 45. La figure est entièrement déterminée par l'énoncé et en particulier, elle est symétrique par rapport à la médiatrice de $[DE]$. Notons 2α l'angle que l'on cherche. On a alors $\widehat{AED} = \widehat{ADE} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

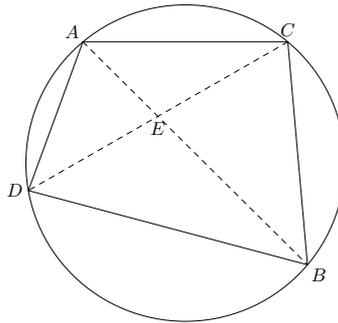


Les triangles DAE et CDE sont isocèles de sommets respectifs A et D . Comme ils ont en commun l'angle \widehat{AED} , ils sont semblables. Il en résulte que $\widehat{CDE} = 2\alpha$. Par ailleurs AGF et BCD sont aussi des triangles isocèles de sommets respectifs G et C . Il en résulte $\widehat{ACB} = 2\alpha$ et :

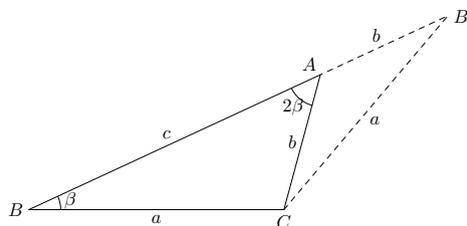
$$\widehat{BCD} = \pi - 2\widehat{ADC} = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - 2\alpha\right) = 6\alpha.$$

Comme les points A , C et E sont alignés, on a la relation $\widehat{ACB} + \widehat{BCD} + \widehat{DCE} = \pi$, c'est-à-dire Comme les points A , C et E sont alignés, on a la relation $\widehat{ACB} + \widehat{BCD} + \widehat{DCE} = \pi$, c'est-à-dire $2\alpha + 6\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{14}$ et l'angle cherché vaut $2\alpha = \frac{\pi}{7}$.

Solution de l'exercice 46. Les triangles AEC et DEB sont semblables, étant donné l'égalité des angles inscrits, donc : $\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{ED}$. De même, les triangles ADE et CBE sont semblables, et $\frac{AD}{BC} = \frac{DE}{BE}$. En multipliant ces deux égalités, on trouve la relation cherchée.

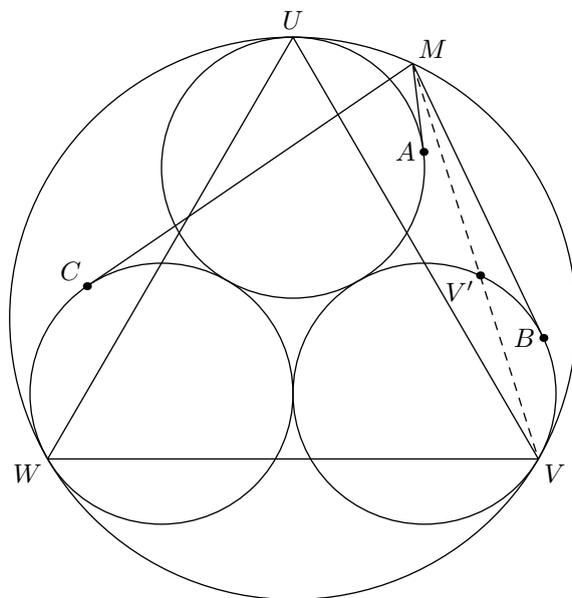


Solution de l'exercice 47. Appelons $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ les longueurs des côtés, et β l'angle \widehat{ABC} (donc 2β l'angle \widehat{BAC}). Soit B' le point de (AB) extérieur au segment $[AB]$ tel que $AB' = b$.



Le triangle $AB'C$ est isocèle, et comme l'angle \widehat{BAC} vaut 2β , $\widehat{AB'C} = \beta = \widehat{ABC}$. Il en résulte que le triangle $B'CB$ est lui aussi isocèle, et que les deux triangles $AB'C$ et $B'CB$ sont semblables, d'où $\frac{CB'}{AB'} = \frac{BB'}{CB}$, soit $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$, ou encore $a^2 = b(b+c)$. Si a, b, c sont entiers, on peut supposer b et c premiers entre eux, sans quoi leur diviseur commun d diviserait également a (d'après cette relation), et en divisant a, b, c par d , on aurait un triangle satisfaisant les mêmes hypothèses, de périmètre d fois plus petit. Or si b et c (donc également b et $b+c$) sont premiers entre eux, et si le produit $b(b+c)$ est un carré parfait, b et $b+c$ sont tous deux des carrés parfaits : $b = m^2$, $b+c = n^2$, donc $a = mn$, et $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$. Or d'après la loi des sinus, $\frac{a}{b} = \frac{\sin(2\beta)}{\sin(\beta)} = 2 \cos(\beta)$. Et comme l'angle $\widehat{ACB} = \pi - 3\beta$ est supposé obtus, $\beta < \frac{\pi}{6}$, d'où $\sqrt{3} < 2 \cos(\beta) = \frac{a}{b} = \frac{m}{n} < 2$, m et n doivent être le plus petit possibles pour que $a+b+c = mn+n^2$ soit minimum, ce qui donne $n = 4$ (car l'intervalle $]\sqrt{3}, 2[$ ne contient pas de demi-entier ni de tiers d'entier), $m = 7$ (car $\sqrt{3} < \frac{7}{4} < 2$), donc $a+b+c = 28+49 = 77$.

Solution de l'exercice 48. Si l'on appelle U, V, W les points de contact de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_3 avec Γ , U, V, W sont les sommets d'un triangle équilatéral.



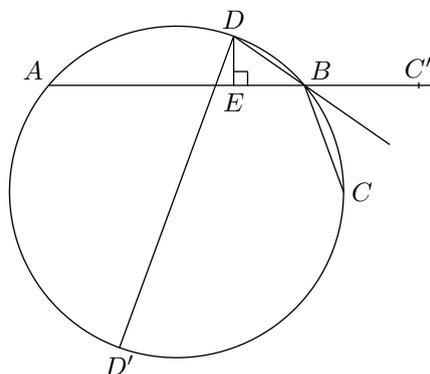
Une propriété classique du triangle équilatéral est que pour tout point M du plan, $MU + MV \geq MW$, avec égalité si et seulement si M est sur l'arc \widehat{UV} de Γ ne contenant pas W . Donc, pour tout point M , l'une des distances MU, MV, MW est somme des deux autres.

Seulement, il s'agit de MA et non de MU , MB et non MV , MC et non MW . Appelons r le rayon commun de $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$, et R le rayon de Γ . La droite MV recoupe \mathcal{C}_2 en V' . L'homothétie de centre V et de rapport $\frac{r}{R}$ transforme le grand cercle Γ en \mathcal{C}_2 , donc M en V' , si bien que : $VV' = \frac{r}{R} \cdot VM$. Donc $V'M = (1 - \frac{r}{R}) \cdot VM$. La puissance du point M par rapport à \mathcal{C}_2 vaut donc :

$$MV \cdot MV' = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot MV^2.$$

Mais cette même puissance de M par rapport à \mathcal{C}_2 vaut également MB^2 . Il en résulte que, si l'on pose $\lambda = \sqrt{1 - \frac{r}{R}}$, $MB = \lambda \cdot MV$. Par un raisonnement analogue, on prouverait que $MC = \lambda \cdot MW$, $MA = \lambda \cdot MU$, de sorte que l'une des longueurs MA, MB, MC est somme des deux autres, puisque l'une des longueurs MU, MV et MW est somme des deux autres.

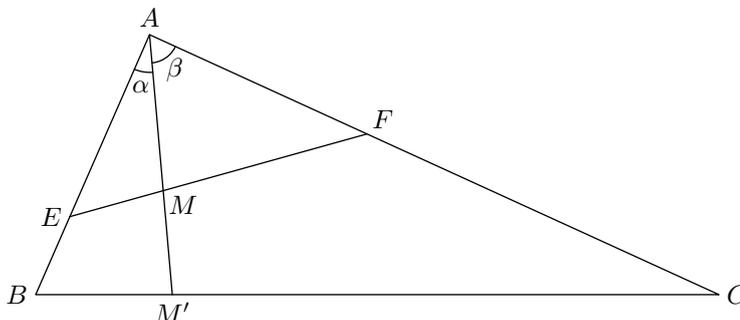
Solution de l'exercice 49. Introduisons le point D' diamétralement opposé à D sur le cercle.



Le triangle BDD' est rectangle en B . On veut donc prouver que (BD') est la bissectrice de l'angle \widehat{ABC} . Par cocyclicité, les angles $\widehat{D'BC}$ et $\widehat{D'BA}$ sont respectivement égaux à $\widehat{ADD'}$ et $\widehat{D'DC}$, qui sont égaux entre eux car D est le milieu de l'arc \widehat{AC} . Cela conclut la première partie de l'exercice.

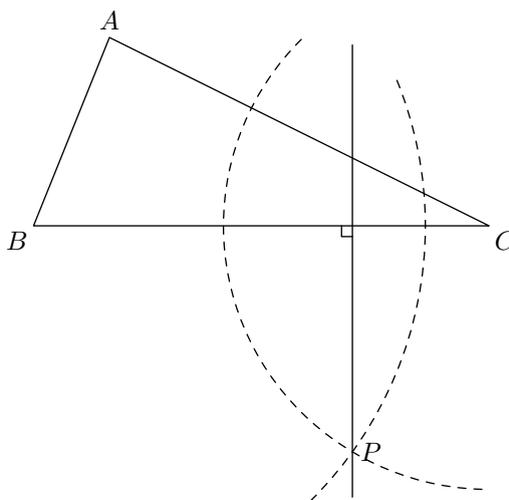
Soit C' le symétrique de C par rapport à la droite (BD) . D'après ce qui précède, il est situé sur la droite (AB) . Il suffit donc pour conclure de montrer que le triangle ADC' est isocèle. Or on a $\widehat{DC'A} = \widehat{BCD} = \widehat{BAD}$, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 50. On veut utiliser le théorème de Ceva. Soient M' , N' et P' les points d'intersection des droites (AM) , (BN) et (CP) .



Calculons le rapport $\frac{M'B}{M'C}$. Ce rapport est égal au rapport de l'aire des triangles ABM' et ACM' . Il est donc égal au rapport $\frac{AB \sin \alpha}{AC \sin \beta}$. De même, on a $\frac{MF}{ME} = \frac{AF \sin \alpha}{AE \sin \beta}$. On a donc $\frac{M'B}{M'C} = \frac{MF}{ME} \frac{AF}{AE} \frac{AB}{AC}$. Le théorème de Ceva permet de conclure.

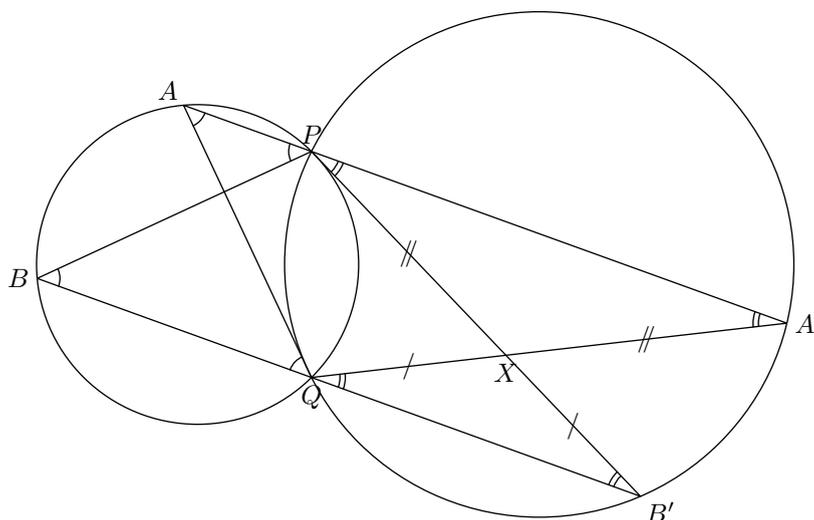
Solution de l'exercice 51. Commençons par faire une figure :



Supposons les perpendiculaires à (BC) , (AC) , (AB) passant par P, Q, R sont concourantes, et soit M leur point d'intersection. Soient C_1 et C_2 deux cercles de centre B et C passant par P . Le point M est sur leur axe radical. Par conséquent, il vérifie $MB^2 - BP^2 = MC^2 - CP^2$. Ajoutons à cette égalité les deux autres obtenues en permutant les points. On obtient $BP^2 + CQ^2 + AR^2 = BR^2 + CR^2 + AQ^2$. Réciproquement, comme dans la démonstration du théorème de Ceva, on prouve que si cette égalité est satisfaite, les trois droites envisagées sont concourantes. Comme cette égalité demeure inchangée par échange des points P, Q, R et A, B, C , l'exercice est résolu.

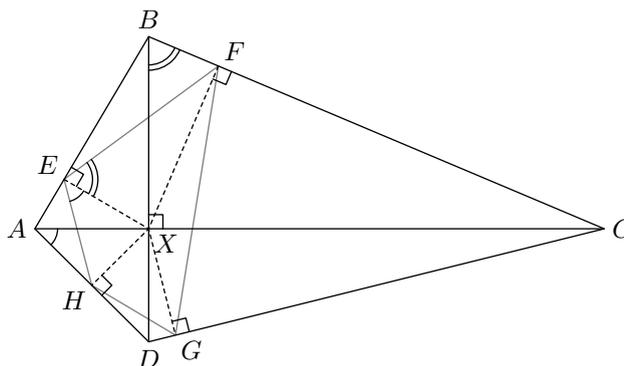
Solution de l'exercice 52. Ces trois points sont les centres des homothéties de rapport positif envoyant un cercle sur un autre. Mais la composée de celle qui envoie le premier cercle sur le deuxième et de celle qui envoie le deuxième sur le troisième est celle qui envoie le premier sur le troisième. Il suffit de se souvenir que la composée de deux homothéties de rapport non inverses l'un de l'autre est une homothétie dont le centre est aligné avec les deux premiers centres pour conclure.

Solution de l'exercice 53. Soit X l'intersection de (AQ) et (BP) .



Par cocyclicité et parallélisme, les quatre angles \widehat{QAP} , \widehat{APB} , \widehat{AQB} et \widehat{PBQ} sont égaux. On en déduit $AQ = BP$. De même, $A'Q = B'P$. Les triangles PAA' et QBB' étant en outre semblables, ils sont isométriques, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 54. Faisons une figure :



Quitte à faire ensuite une homothétie de centre X et de rapport 2, il suffit de montrer que les projetés de X sur les quatre côtés du quadrilatère sont cocycliques. Cela se vérifie immédiatement à l'aide de l'énoncé et en remarquant la cocyclicité des points X, E, B, F et de leurs semblables.

Arithmétique

Solution de l'exercice 55. Intéressons-nous à la parité des nombres x , y et z . Il est impossible qu'ils soient tous les trois impairs, car sinon le membre de gauche de l'égalité serait impair tandis que le membre de droite serait pair. Ainsi l'un des nombres — et l'on peut supposer sans perte de généralité que c'est x — est pair. Il s'ensuit que $xyz - 1$ est impair, et donc qu'il doit en être de même de $x^2 + y^2 + z^2$ et donc de $y^2 + z^2$ puisque x^2 est pair. On en déduit que y et z sont de parité différente : par exemple y est pair et z est impair.

On regarde maintenant modulo 4. Avec ce qui précède, on a $x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \pmod{4}$ et $z^2 \equiv 1 \pmod{4}$, d'où on déduit $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod{4}$. Mais par ailleurs, le produit xy est multiple de 4, d'où il reste $xyz - 1 \equiv 3 \pmod{4}$. Ceci conduit une contradiction qui prouve que l'équation n'a pas de solution.

Solution de l'exercice 56. Si n est pair, alors $n^4 \equiv 0 \pmod{16}$. Sinon, $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$ car $(4k \pm 1)^4 \equiv 1 \pmod{16}$. Par conséquent, $n_1^4 + n_2^4 + \dots + n_{14}^4 \equiv -1 \pmod{16}$ n'est pas possible. L'équation n'a pas de solution.

Solution de l'exercice 57. Considérons l'équation de l'énoncé modulo 9. Elle s'écrit alors $x^3 + y^3 \equiv 5 \pmod{9}$. Or un cube modulo 9 ne peut valoir que 0, 1 ou -1 et on constate que manifestement 5 ne peut s'écrire modulo 9 comme somme de trois de ces nombres. En conclusion, l'équation n'a pas de solution.

Solution de l'exercice 58. On cherche à savoir si l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 20042005$ admet des solutions en nombres entiers. Nous allons montrer que ce n'est pas le cas en réduisant modulo 9. On vérifie qu'un cube modulo 9 ne peut être congru qu'à 0, 1 ou -1 . Ainsi la somme de trois cubes ne peut prendre que les restes 0, 1, 2, 3, -1 , -2 ou -3 modulo 9. Or $20042005 \equiv 4 \pmod{9}$, ce qui démontre l'impossibilité de satisfaire notre équation.

Solution de l'exercice 59. On cherche à résoudre l'équation $x^3 = (y-1)^2 + y^2 + (y+1)^2 = 3y^2 + 2$ en nombres entiers relatifs. On va prouver qu'elle n'a pas de solution en regardant modulo 9. Modulo 3 un carré ne prend que les valeurs 0 et 1, ainsi modulo 9 le terme $3y^2$ est congru soit à 0, soit à 3. Il s'ensuit que le membre de droite $3y^2 + 2$ ne peut être congru qu'à 2 ou 5. Or un cube modulo 9 n'est jamais congru ni à 2, ni à 5 comme on le vérifie directement. Il s'ensuit que l'équation n'a pas de solution et donc qu'aucun cube n'est la somme de trois carrés consécutifs.

Solution de l'exercice 60. On raisonne par descente infinie. L'équation de départ implique que x^3 est multiple de 3, et donc qu'il en est de même pour x . On écrit $x = 3x'$ et l'équation devient $9x'^3 - y^3 - 3z^3 = 0$. En refaisant le même raisonnement, on montre que y est multiple de 3 puis en écrivant $y = 3y'$, l'équation se transforme à nouveau pour donner $3x'^3 - 9y'^3 - z^3 = 0$. Encore une fois, il s'ensuit que $z = 3z'$ pour un entier z' et le triplet (x', y', z') est alors à nouveau solution de l'équation de départ.

Par le principe de descente infinie, il suit que l'unique solution est $(0, 0, 0)$.

Solution de l'exercice 61. On considère cette équation modulo 13. Une étude exhaustive montre qu'une cube modulo 13 ne peut prendre que les valeurs suivantes : 0, 1, 5, 8 et 12. Ainsi la quantité $5x^3$ ne peut valoir¹¹ que 0, 1, 5, 8 et 12 alors que $11y^3$ ne peut valoir que 0, 2, 3, 10 et 11. Le terme $13z^2$, quant à lui, s'annule évidemment modulo 13 quelle que soit la valeur de z . De ce qui précède, on déduit que la seule solution pour avoir une somme nulle est $5x^3 \equiv 11y^3 \pmod{13}$. Il en découle, puisque 13 est premier, que x et y sont tous les deux multiples de 13. En écrivant $x = 13x'$ et $y = 13y'$ et en remplaçant dans l'équation de départ, on se rend compte que z est lui aussi nécessairement multiple de 13, *i.e.* s'écrit $z = 13z'$.

Mais alors, le triplet (x', y', z') est à nouveau solution de la même équation, et une application du principe de descente infinie assure que l'unique solution est le triplet $(0, 0, 0)$.

Solution de l'exercice 62. Remarquons tout d'abord que $k!$ doit être divisible par 48, ce qui n'est vérifié qu'à partir de $k = 6$.

Supposons d'abord $k + 1$ non premier. On peut écrire $k + 1 = pq$, avec $p \leq k$ et $q \leq k$. Si p et q sont distincts, ils apparaissent tous deux comme facteurs de $k!$, donc $k + 1 \mid k!$. Si $p = q > 2$, alors q et $2q$ sont deux des facteurs de $k!$, donc $k!$ est divisible par q^2 . Hormis lorsque $k = 3$ (déjà exclu), si $k + 1$ n'est pas premier, $k + 1$ divise $k!$. Dès lors, dans ce cas, $k + 1$ doit aussi diviser 48. Mais, d'après la remarque préliminaire, $k + 1 \geq 7$, ce qui offre comme seules possibilités pour $k + 1$: 8, 12, 16, 24 ou 48. Toutes ces valeurs sont paires, de sorte que $48(k + 1)^m$ est divisible par 32. Si $k \geq 8$, $k!$ est divisible par $8! = 32 \times 1260$, donc lui aussi par 32. Alors que 48 n'est pas divisible par 32 : contradiction. Et dans le cas restant $k = 7$, $7! + 48 = 48 \times 158$, or 158 n'est pas une puissance de 8.

Donc $k + 1$ doit être un nombre premier. Mais, d'après le théorème de Wilson, modulo ce nombre premier $p = k + 1$, $k! = (p - 1)!$ est congru à -1 . Donc le premier membre de notre équation est congru à 47 modulo $k + 1$. Et pour que ce premier membre soit, conformément à l'hypothèse, divisible par $k + 1$, la seule valeur possible est $k + 1 = 47$. On doit donc avoir $\frac{46!}{48} = 47^m - 1$. Or $47^m = (1 + 46)^m$, et

11. Il est normal que l'on retrouve les mêmes valeurs puisque 5 est un cube modulo 13.

$47^m - (1 + 46m)$ est divisible par 46^2 . $\frac{46!}{48}$ est lui aussi divisible par 46^2 , puisque $46!$ contient les facteurs 3, 32, 23 et 46. Il en résulte que $46m$ doit également être divisible par 46^2 , donc que m doit être divisible par 46. Mais on ne peut pas avoir $m \geq k$, car $2 \times 3 \times \dots \times k \leq (k+1)^{k-1}$ et $48 < k!$, si bien que le membre de gauche est strictement inférieur à $2(k-1)(k+1)^{k-1}$, donc a fortiori à $48(k+1)^m$ pour $m \geq k$. Dès lors, $k = 46$ et m divisible par 46 est lui aussi exclu, il ne reste donc plus de solution possible.

Solution de l'exercice 63. Une interversion de sommes permet de montrer que la différence des deux sommes est égale à la somme des $(-1)^d E(n/d)$, où E est la partie entière. Cette somme est faite de termes décroissantes dont les signes alternent. Elle est donc comprise entre son premier et son deuxième terme, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 64. Les seules solutions sont $2^5 5^3$, 2 et 2^7 . Pour prouver cela, on étudie la décomposition de n en facteurs premiers. Une étude de la congruence modulo 3 des valuations p -adiques montre que 3 ne divise pas n . Séparant les facteurs premiers en 2 et ≥ 5 , une simple inégalité permet de conclure.

Solution de l'exercice 65. On encadre facilement y par $x+1$ et $x+3$ strictement. On a donc $y = x+2$. Cela fournit immédiatement $x = 9$ et $y = 11$.

Solution de l'exercice 66. On a $899 = 900 - 1 = 31 \times 29$, or 31 et 29 sont premiers. Pour tout n , $a^n - b^n$ est divisible par $a - b$, donc $36^n - 5^n$ est donc divisible par $36 - 5 = 31$, et $24^n - (-7)^n$ est lui aussi divisible par $24 + 7 = 31$. Pour n pair, comme $(-7)^n = 7^n$, le terme P_n est bien divisible par 31, mais pour n impair, c'est $36^n + 24^n + 7^n - 5^n$ qui est divisible par 31, donc P_n n'est pas divisible par 31 (ni a fortiori par 899), car la différence 2×7^n n'est pas divisible par 29. De même, pour n pair, $36^n - 7^n$ est divisible par $36 - 7 = 29$, $24^n - 5^n$ est divisible par $24 + 5 = 29$, donc P_n est divisible par 29, alors que si n est impair, $36^n - 7^n$ est encore divisible par 29, mais $24^n - 5^n$ n'est pas divisible par 29 (car 29 ne divise pas 2×5^n), donc P_n n'est pas divisible par 29. P_n est divisible par 29 et par 31 (donc par 899) si et seulement si n est pair.

Solution de l'exercice 67.

Méthode 1. $\lfloor ka/b \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à ka/b , donc $\frac{ka}{b} - 1 < \lfloor \frac{ka}{b} \rfloor \leq \frac{ka}{b}$. Ce qu'on peut écrire $\lfloor \frac{ka}{b} \rfloor = \frac{ka}{b} - \frac{u_k}{b}$, u_k étant l'entier compris entre 0 et $b-1$ tel que $ka - u_k$ soit divisible par b (le reste de la division euclidienne). Or la somme des $\frac{ka}{b}$ vaut :

$$\frac{a}{b}(1 + 2 + \dots + (b-1)) = \frac{a}{b} \times \frac{b(b-1)}{2} = \frac{a(b-1)}{2}.$$

Mais il faut en soustraire la somme des $\frac{u_k}{b}$: il n'est pas possible de calculer u_k pour un k donné, on peut néanmoins affirmer que les u_k sont non nuls et ne prennent pas deux fois la même valeur. En effet, si $u_k = u_{k'}$, cela signifierait que $ka - u_k$ et $k'a - u_k$ sont tous deux divisibles par b , donc que $(k - k')a$ est divisible par b : b étant premier avec a , il diviserait $k - k'$ (d'après le théorème de Gauss), ce qui n'est pas possible si k et k' sont distincts et tous deux compris entre 0 et $b-1$ (donc $0 < |k - k'| < b$). Le même raisonnement prouve que u_k ne peut pas être nul. Et si u_k prend $b-1$ valeurs distinctes entre 1 et $b-1$, il prend toutes les valeurs de 1 à $b-1$, de sorte que la somme des $\frac{u_k}{b}$ vaut :

$$1 + 2 + \dots + \frac{b-1}{b} = \frac{b-1}{2}.$$

La somme m est donc égale à $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$. Le même calcul sur la somme n nous donnera le même résultat, symétrique en a et b , de sorte qu'on aura obligatoirement $m = n = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$.

Méthode 2. On peut également remarquer que pour tout k , $\frac{ka}{b} + \frac{(b-k)a}{b} = a$ est entier. Si ni $\frac{ka}{b}$ ni $\frac{(b-k)a}{b}$ ne sont entiers, la somme de leurs parties décimales vaut 1, donc la somme de leurs parties

entières vaut $a - 1 = 2 \frac{a-1}{2}$. Si b est pair, a , premier avec b , est impair, et le terme du milieu, $\lfloor \frac{a}{2} \rfloor$, vaut $\frac{a-1}{2}$. On en déduit que l'on ne modifie pas la somme en remplaçant chaque partie entière par $\frac{a-1}{2}$, et comme il y a $b - 1$ parties entières, leur somme vaut toujours $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$, tant dans le calcul de m que dans le calcul de n .

Solution de l'exercice 68. Posons $q = ab^2 + b + 7$, et $n = a^2b + a + b$. Puisque q divise n , q divise nb ainsi que $nb - aq = b^2 - 7a$. Or $-7a < b^2 - 7a < b^2$, et b^2 est manifestement strictement inférieur à q . De même, si $b \geq 3$, $-7a > -q$. Si $b \geq 3$, le quotient n/q , s'il est entier, ne peut être que 0.

Il reste donc trois cas à étudier : $b = 1$, $b = 2$ et $b^2 - 7a = 0$.

Si $b = 1$, $q = a + 8$ doit diviser $n = a^2 + a + 1 = (a + 8)(a - 7) + 57$. Donc $a + 8$ doit diviser 57 : soit $a = 11$, soit $a = 49$, ce qui fournit deux solutions : $b = 1$ et $a = 11$, $q = 19$ et $n = 133 = 19 \times 7$, et $b = 1$, $a = 49$, $q = 57$, $n = 2451 = 57 \times 43$.

Si $b = 2$, $q = 4a + 9$ doit diviser $2a^2 + a + 2 = \frac{1}{8}(4a + 9)(4a - 7) + \frac{79}{8}$. Donc $4a + 9$ doit diviser 79, ce qui n'est manifestement pas possible (79 est premier et $79 - 9 = 70$ n'est pas divisible par 4).

Mais n'oublions pas le troisième cas : $b^2 - 7a = 0$. Si $7a$ est un carré parfait divisible par 7, $a = 7k^2$, $b = 7k$, et on remarque que pour toute valeur de k , nous avons là une solution, car $q = 343k^4 + 7k + 7$ divise $n = 343k^5 + 7k^2 + 7k = kq$.

Les solutions sont donc $(11, 1)$, $(49, 1)$ et $(7k^2, 7k)$ pour tout valeur de k .

Solution de l'exercice 69. En regardant modulo 3, on montre que $z = 2z'$ doit être un nombre pair. De même, en regardant modulo 4, on montre que $x = 2x'$ doit aussi être pair. L'équation devient alors :

$$3^{2x'} = (5^{z'} - 2^y)(5^{z'} + 2^y).$$

Chacun des facteurs doit être une puissance de 3 mais leur somme n'est pas divisible par 3. L'un des deux, nécessairement le plus petit (ici le premier), doit être égal à 1. On obtient ainsi les deux équations $5^{z'} - 2^y = 1$ et $5^{z'} + 2^y = 3^{2x'}$. La première équation implique, en regardant modulo 3, que z' est impair et que y est pair. Mais si $y \geq 3$, n'importe laquelle de ces équations implique, en regardant modulo 8, que z' est pair. Il n'y a donc pas de solution avec $y \geq 3$. La seule possibilité restante est $y = 2$ qui donne directement $x = z = 2$ aussi.

Solution de l'exercice 70. On a :

$$(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$$

divisible par 6, ce qui implique $a + b + c$ divisible par 6. Or pour tout entier n , $n^3 - n = (n + 1)n(n - 1)$ est toujours divisible par 6 : l'un des trois entiers $n + 1$, n ou $n - 1$ est multiple de 3, et l'un au moins est pair. Donc, $(a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c)$ est divisible par 6, ce qui entraîne $a^3 + b^3 + c^3$ divisible par 6.

Solution de l'exercice 71. On note $S_k = 5^k + 7^k$. On va montrer que le PGCD de S_n et S_m est 12 si m et n sont impairs et 2 sinon. On note δ le PGCD que l'on cherche à calculer. Pour $m = n = 1$, on a directement $\delta = 12$. On suppose $m > n$ et on pose $m = n + a$; a et n sont premiers entre eux. Posons $U_a = 7^a - 5^a$. Alors $S_m - 5^a S_n = 7^n U_a$. Or, on a $\text{PGCD}(\delta, 7) = \text{PGCD}(\delta, 5) = 1$, d'où $\delta = \text{PGCD}(U_a, S_n)$.

Si a est impair, on pose $S_n = \delta \ell$ et $U_a = \delta k$ avec k et ℓ premiers entre eux. Alors $7^{an} = (\delta \ell - 5^n)^a$ se met sous la forme $\delta L - 5^{an}$ grâce à la formule du binôme. De même $7^{an} = \delta K + 5^{an}$ pour un entier K . Ainsi $\delta(K - L) = 2 \times 5^{an}$. D'après le théorème de Gauss, δ est un diviseur de 2. C'est 2 car les deux nombres sont pairs.

Si a est pair, on pose $a = 2b$ de sorte que $\text{PGCD}(b, n) = 1$ et n impair. Alors δ divise $(7^n - 5^n)(7^n + 5^n) = 7^{2n} - 5^{2n}$ ainsi que $U_a = 7^{2b} - 5^{2b}$. Il divise donc leur PGCD qui vaut $7^2 - 5^2 = 24$. Par ailleurs, comme m et n sont impairs, on a $7^m \equiv -1 \pmod{8}$ et $5^m \equiv 5 \pmod{8}$ et ainsi $S_m \equiv 4 \pmod{8}$. De même $S_n \equiv 4 \pmod{8}$. Par conséquent S_n et S_m sont divisibles par 4 mais pas par 8. De même, on montre qu'ils sont divisibles par 3. La valeur de δ est donc 12 comme annoncé.

Solution de l'exercice 72. Si $n+2$ est premier, aucun des facteurs de $n!$ n'est divisible par $n+2$, donc $n!$ n'est pas divisible par $n+2$. Par contre, si $n+2 = pq$, p et q sont inférieurs ou égaux à n , dans la mesure où $n+2$ n'a pas de diviseurs communs avec $n+1$. Si p et q sont distincts, tous deux apparaissent séparément dans le calcul de $n! = n \times \dots \times q \times \dots \times p \times \dots \times 1$, et $n!$ est divisible par pq . Si $p = q$, soit $p = q = 2$ auquel cas $n = 2$ et $n! = 2$ n'est pas divisible par $n+2 = 4$, soit $p = q \geq 3$, auquel cas parmi les entiers inférieurs ou égaux à $n = q^2 - 2$ figurent q et $2q$ notamment (car $q^2 - 2q - 2 > 0$), ce qui suffit à prouver que $n!$ est divisible par q^2 .

Solution de l'exercice 73. L'idée essentielle est de faire disparaître les racines carrées, en utilisant la différence de deux carrés. Posons $\varepsilon = \sqrt{7} - \frac{m}{n}$. Si l'on multiplie ε par $\sqrt{7} + \frac{m}{n}$, on obtient $\frac{7n^2 - m^2}{n^2}$. Le numérateur est un entier, mais pas n'importe quel entier : si on le minore par 1, cela ne suffit pas car $\sqrt{7} + \frac{m}{n} > \frac{m}{n}$. En étudiant les carrés modulo 7, on remarque qu'ils sont congrus à 0, 1, 2 ou 4, ce qui entraîne que $7n^2 - m^2$ est congru à 0, 6, 5 ou 3 modulo 7, et ne peut jamais être égal à 1 ou 2. Donc $7n^2 - m^2 \geq 3$ dans la mesure où cela ne peut pas être nul, et si $\sqrt{7} + \frac{m}{n} < \frac{3m}{n}$, alors

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} = \frac{7n^2 - m^2}{n^2 \left(\sqrt{7} + \frac{m}{n} \right)} > \frac{3/n^2}{3m/n} = \frac{1}{mn}.$$

Si par contre $\sqrt{7} + \frac{m}{n} \geq \frac{3m}{n}$, alors $\sqrt{7} - \frac{m}{n} \geq \frac{m}{n} \geq \frac{1}{mn}$, l'égalité n'étant possible que pour $m = 1$. Pour $m = 1$, $\sqrt{7} - \frac{1}{n} \geq \sqrt{7} - 1 > 1 \geq \frac{1}{mn}$, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 74. Si a est différent de b , un nombre premier p figure, dans les décompositions en facteurs premiers de a et b , avec des exposants différents, éventuellement nuls. Appelons u et v ces exposants de p dans les décompositions de a et b respectivement. $a = Ap^u$, et $b = Bp^v$. A chaque diviseur k de A correspondent $u+1$ diviseurs de a : k, kp, kp^2, \dots, kp^u , donc le nombre de diviseurs de a , que nous appellerons $d(a)$, vaut $(u+1)d(A)$. Pour un i donné entre 0 et u , les $d(A)$ diviseurs du type kp^i ont chacun i comme exposant de p : si on les multiplie, l'exposant de p du produit vaut $id(A)$. Donc l'exposant de p dans la décomposition de $f(a)$ sera $(1+2+\dots+u)d(A) = \frac{u(u+1)}{2}d(A)$. En rapprochant de $d(a) = (u+1)d(A)$, on trouve que cet exposant de p dans la décomposition de $f(a)$ vaut $\frac{u}{2}d(a)$. Par un calcul analogue, p a pour exposant $\frac{v}{2}d(b)$ dans la décomposition de b . Cela permet d'écrire $\frac{u}{v} = \frac{d(b)}{d(a)}$. Mais $\frac{d(b)}{d(a)}$ est indépendant du nombre p choisi, de sorte que le rapport $\frac{u}{v}$ est le même pour tous les facteurs premiers p intervenant dans la décomposition de l'un ou l'autre des entiers a ou b . Si $d(b) > d(a)$, pour tout p , $u > v$, ce qui signifie que p a un exposant plus élevé dans a que dans b , ce qui contredit le fait que le nombre de diviseurs de a est inférieur au nombre de diviseurs de b . De même, si $d(b) < d(a)$, $u < v$ pour tout p , donc le nombre de diviseurs de b ne peut pas être inférieur au nombre de diviseurs de a . Seul est possible le cas où, pour tout p , $u = v$, c'est-à-dire où l'exposant de p est le même dans a que dans b , ce qui signifie précisément que $a = b$.

3 En TPE

3.1 Les énoncés

Exercice 1 (résolu par Marcus Hanzig). On note $\{x\}$ la partie décimale d'un réel x . Montrer que $\{n\sqrt{3}\} > \frac{1}{n\sqrt{3}}$ pour tout entier n strictement positif. Existe-t-il une constante $c > 1$ telle que $\{n\sqrt{3}\} > \frac{c}{n\sqrt{3}}$ pour tout entier n strictement positif?

Exercice 2. Soient n un entier naturel non nul, d le nombre de diviseurs strictement positifs de n et D le produit de ces diviseurs. Montrer que $n^d = D^2$.

Exercice 3. Une opération binaire \star vérifie $(a \star b) \star c = a + b + c$ pour tous réels a , b et c . Montrer que \star est l'addition usuelle.

Exercice 4. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction telle que $f(1) = 1$ et :

$$f(x + y) \geq f(x) + f(y)$$

dès que x, y et $x + y$ sont dans $[0, 1]$. Montrer que $f(x) \leq 2x$ pour tout $x \in [0, 1]$.

Exercice 5. Soit $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Combien y a-t-il de fonctions $f : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow A$ vérifiant $f(B) \in B$ et $f(B \cup C) \in \{f(B), f(C)\}$ pour toutes parties B et C non vides de A ?

Exercice 6 (résolu par Christopher Wells). Montrer qu'il existe un entier divisible par 2^{100} et ne contenant pas le chiffre 0.

Exercice 7. Soit $n \geq 1$ un entier, et soient X_1, \dots, X_{2^n-1} des n -uplets d'entiers relatifs. Montrer qu'il existe un n -uplet d'entiers relatifs X tel que pour tout i , le segment ouvert $]X, X_i[$ ne passe par aucun point à coordonnées entières.

Exercice 8. Montrer qu'un couple (p, q) d'entiers strictement positifs vérifie l'équation

$$p^2 - 2q^2 = \pm 1$$

si et seulement si

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{2}}}}$$

avec p et q premiers entre eux.

Exercice 9 (résolu par Juliette Fournier). Soit P un polynôme à coefficients entiers non constant. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p pour lesquels il existe au moins un entier naturel x tel que p divise $P(x)$.

Exercice 10 (résolu par Philippe Cloarec). Deux joueurs jouent au jeu suivant. Ils disposent d'un rectangle en papier $n \times m$ quadrillé. Tour à tour, chaque joueur choisit un noeud du réseau à l'intérieur du rectangle, ou bien sur son bord gauche ou inférieur. Il hachure les cases du rectangle qui se trouvent en haut à droite par rapport au noeud choisi. Puis il passe le rectangle à l'autre joueur. À chaque coup, chaque joueur est obligé de hachurer au moins une case non encore hachurée auparavant. Celui qui a hachuré la dernière case du rectangle a perdu. Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?

Exercice 11. Trouver tous les réels x tels que :

$$\{(x + 1)^3\} = x^3$$

où $\{x\}$ désigne la partie décimale de x .

Exercice 12. Quelles sont les longueurs des diagonales d'un quadrilatère dont les longueurs des côtés sont 1, 3, 4 et 10 ?

Exercice 13. Deux polynômes à coefficients entiers ont une racine commune qui est un entier strictement négatif. Peut-il exister un entier positif sur lequel les polynômes s'évaluent respectivement en 2007 et 2008 ?

Exercice 14 (résolu par Adrien Laroche). Un point P est contenu dans un polyèdre convexe. Pour chaque face F du polyèdre, on considère le projeté orthogonal P_F de P sur le plan de cette face. Montrer qu'il existe au moins une face F telle que P_F se trouve sur la face F elle-même, et non sur son prolongement.

Exercice 15. On dispose d'un carré $ABCD$ de côté $a > 1$. On place le point A' (resp. B' , resp. C' , resp. D') sur le côté $[AB]$ (resp. $[BC]$, resp. $[CD]$, resp. $[DA]$) à distance 1 de l'extrémité A (resp. B , resp. C , resp. D). On obtient un carré $A'B'C'D'$ (plus petit) pour lequel on réitère la construction. Quelle est la plus petite valeur de a pour laquelle il est possible d'itérer 2007 fois la construction précédente ?

Exercice 16. Soient x et y des nombres réels. On suppose que la suite des :

$$(\cos(n\pi x) + \cos(n\pi y))_{n \in \mathbb{N}}$$

ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que x et y sont tous les deux rationnels.

Exercice 17 (résolu par Maxime Martelli et Rémi Varloot). La suite (x_n) est définie de la manière récurrente suivante : $x_1 = 10^{2007} + 1$ et pour tout $n \geq 2$, x_n est le nombre 11 x_{n-1} auquel on a retiré le chiffre de gauche. Montrer que la suite (x_n) est bornée.

Exercice 18. Soient $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions additivites (i.e. satisfaisant $f_i(x+y) = f_i(x) + f_i(y)$) pour tous réels x et y . On suppose que :

$$f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x) = ax^n$$

pour un certain réel a . Montrer qu'il existe un indice i pour lequel la fonction f_i est de la forme $f_i(x) = b_i x$, $b_i \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. Pierre dit : « Avant-hier j'avais 10 ans. L'année prochaine, je fêterai mon 13-ième anniversaire. » Quel jour est-on ?

Exercice 20 (résolu par François Caddet, Marc Coiffier et Jean-Alix David). Soit (a_n) définie par $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, et pour $n \geq 1$, a_{n+2} est le reste de la division euclidienne de $a_n + a_{n+1}$ par 100. Calculer le reste de la division euclidienne de :

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2007}^2$$

par 8.

Exercice 21 (résolu par Amélie Héliou). Si n est un entier, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n . Trouver tous les entiers n tels que $n = d(n)^2$.

Exercice 22. Montrer que tout entier $k > 1$ admet un multiple non nul inférieur à k^4 dont l'écriture décimale ne comporte que quatre chiffres distincts.

Exercice 23. On considère 2007 réels x_1, \dots, x_{2007} tels que pour tout $I \subset \{1, 2, \dots, 2007\}$ de cardinal 7, il existe $J \subset \{1, 2, \dots, 2007\}$ de cardinal 11 vérifiant

$$\frac{1}{7} \sum_{i \in I} x_i = \frac{1}{11} \sum_{j \in J} x_j.$$

Montrer que tous les x_i sont égaux.

Exercice 24. Un polygone régulier à 2007 côtés est pavé par des triangles dont les sommets sont choisis parmi les sommets du polygone. Montrer qu'un seul triangle du pavage a ses trois angles aigus.

Exercice 25 (résolu par Anca Arnautu). On suppose que $AB = 1$, et que les segments obliques font un angle de 45° par rapport à (AB) . Il y a n sommets au dessus de (AB) .



Quelle est la longueur de la ligne brisée ?

Exercice 26 (résolu par Anca Arnautu et Adrien Laroche). Soit \mathcal{P} la parabole dans le plan d'équation $y = x^2$. Soit Γ_1 le cercle de diamètre 1 tangent intérieurement à \mathcal{P} en l'origine. Par récurrence, on définit Γ_{n+1} comme le cercle tangent à Γ_n et deux fois à \mathcal{P} . Calculer le diamètre de Γ_{2007} .

Exercice 27 (résolu par Jean-François Martin). On choisit un point à l'intérieur d'un $2n$ -gone régulier et on le relie à tous les sommets du polygone. Les $2n$ triangles ainsi obtenus sont coloriés en noir et blanc en alternance. Montrer que l'aire totale des triangles noirs est égale à celle des triangles blancs.

Exercice 28 (résolu par Martin Clochard). Montrer que pour tous réels strictement positifs x et y ,

$$\frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}.$$

Exercice 29. Soit X un ensemble fini de cardinal n , et soient A_1, \dots, A_m des parties de cardinal 3 dont les intersections deux à deux sont de cardinal au plus 1. Montrer qu'il existe une partie A de X de cardinal supérieur ou égal à $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor$ (où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x) et ne contenant aucun des A_i .

Exercice 30 (résolu par Christopher Wells). Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$f(x^3 + y^3) = (x+y)(f(x)^2 - f(x)f(y) + f(y)^2)$$

pour tous réels x et y . Montrer que pour tout réel x , on a $f(2007x) = 2007f(x)$.

Exercice 31 (résolu par Adrien Laroche). Montrer que pour tous entiers strictement positifs a et b , le nombre $(36a + b)(a + 36b)$ n'est pas une puissance de 2.

Exercice 32 (résolu par Pierre Camilleri). Montrer que dans un polyèdre quelconque, il y a toujours deux faces ayant le même nombre de côtés.

Exercice 33 (résolu par Marcus Hanzig). Montrer que la suite (a_n) définie par $a_1 = 1$ et :

$$a_n = a_{n-1} + a_{\lfloor n/2 \rfloor}$$

pour $n \geq 2$ (où $\lfloor k \rfloor$ est la partie entière de k) contient une infinité de multiples de 7.

Exercice 34 (résolu par Alice Héliou). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$$

pour tous réels x et y .

Exercice 35. Que peut-on dire d'une fonction f dont le graphe possède deux centres de symétrie ?

Exercice 36. Soit a_n la suite récurrence définie par $a_0 = 2$ et $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$. Soient $N \geq 1$ et p un diviseur premier de a_N . On suppose qu'il existe un entier x tel que $x^2 \equiv 3 \pmod{p}$. Montrer que 2^{N+2} divise $p - 1$.

Exercice 37. Trouver tous les couples de nombres premiers (p, q) tels que :

$$x^{3pq} \equiv x \pmod{3pq}$$

pour tout entier x .

Exercice 38. Trouver tous les n -uplets de réels strictement positifs (a_1, \dots, a_n) tels que :

$$\sum_{i=1}^n a_i = 96 \quad ; \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 = 144 \quad ; \quad \sum_{i=1}^n a_i^3 = 216.$$

Exercice 39. Nous avons 13 boules de poids 1 à 13 kg, mais d'apparence similaire. À l'usine on a collé sur chaque boule une petite étiquette indiquant son poids (ainsi, les étiquettes vont aussi de 1 à 13). Nous voulons vérifier que toutes les étiquettes ont été collées correctement, sans permutations par rapport aux vrais poids des boules. Pour cela nous disposons d'une balance à deux plateaux. Elle ne permet pas de dire le poids de telle ou telle boule (ou ensemble de boules). Elle permet seulement de vérifier si l'ensemble de boules posées sur le plateau gauche pèse moins, autant ou plus que l'ensemble de boules posées sur le plateau droit. Montrer qu'on peut s'assurer en 3 pesées que toutes les étiquettes sont collées correctement.

Exercice 40. Trouver le plus petit entier $n > 0$ pour lequel les fractions :

$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \dots, \frac{91}{n+93}$$

sont toutes irréductibles.

Exercice 41 (résolu par Juliette Fournier). Soit λ la racine positive de l'équation $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Soit la suite (x_n) définie par $x_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$, par :

$$x_{n+1} = [\lambda x_n]$$

où $[x]$ est la partie entière de x . Calculer le reste de la division euclidienne de x_{1998} par 1998.

Exercice 42. Existe-t-il des entiers strictement positifs n et m tels que 5^n et 6^m se terminent par les quatre mêmes chiffres ?

Exercice 43 (résolu par Thomas Williams). Montrer que le nombre $\underbrace{111\dots 111}_{3^n}$ est divisible par 3^n , mais pas par 3^{n+1} .

Exercice 44 (résolu par Vincent Langlet). Soit $n > 10$ un entier dont tous les chiffres sont dans l'ensemble $\{1, 3, 7, 9\}$. Montrer que n admet un diviseur premier supérieur ou égal à 11.

Exercice 45. Trouver tous les entiers $n \geq 2$ pour lesquels le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1^2 + x_2^2 + 50 = 16x_1 + 12x_2 \\ x_2^2 + x_3^2 + 50 = 16x_2 + 12x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}^2 + x_n^2 + 50 = 16x_{n-1} + 12x_n \\ x_n^2 + x_1^2 + 50 = 16x_n + 12x_1 \end{array} \right.$$

admet au moins une solution en nombres entiers.

Exercice 46. Un ver pénètre par un point A dans une belle pomme rouge assimilée à une sphère de 5 cm de rayon et il en sort par un point B , la longueur du parcours AB est de 9,9 cm. Sachant que le

parcours du ver n'est pas nécessairement rectiligne, trouver le coup de couteau qui partage la pomme en deux parties égales avec l'une des deux moitiés parfaitement saine.

Exercice 47. Un parallépipède rectangle P est contenu dans un parallépipède rectangle Q . Est-il possible que le périmètre de P soit plus grand que celui de Q ?

Exercice 48. Soient (a_1, \dots, a_n) et (x_1, \dots, x_n) deux n -uplets de réels strictement positifs dont les sommes font 1. Montrer que :

$$2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \leq \frac{n-2}{n-1} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i x_i^2}{1-a_i}$$

et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 49. Soient x_1, \dots, x_n des nombres réels strictement supérieurs à 1. On compte le nombre de réels de la forme $\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_n x_n$, $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ qui sont dans un intervalle donné de longueur 1. Quel est le nombre maximal que l'on peut obtenir ainsi ?

Exercice 50. On donne à chaque lettre de l'alphabet une valeur correspondant à son rang. Ainsi la lettre A vaut 1, la lettre B vaut 2, etc. Trouver le plus petit nombre qui est égal à la somme des valeurs de lettres qui apparaissent dans son écriture en toutes lettres.

Exercice 51. Trouver un polynôme à deux variables P tel que l'ensemble des valeurs prises par $P(x, y)$ lorsque x et y parcourent les nombres réels soit exactement les nombres réels strictement positifs.

Exercice 52 (résolu par Alice Héliou). La somme de vingt entiers consécutifs est 1030. Quel est le plus petit de ces entiers ?

Exercice 53 (résolu par Martin Clochard). Trouver toutes les solutions réelles de l'équation :

$$4x^2 - 40[x] + 51 = 0$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x .

Exercice 54 (résolu par Adrien Laroche). On perce un trou cylindrique de 6 cm de long à travers une sphère, l'axe du cylindre passant par le centre de la sphère. Quel est le volume restant ? (On rappelle que le volume d'une calotte sphérique est $\pi h^2(R - h/3)$, où R est le rayon de la sphère et h la hauteur de la calotte.)

Exercice 55. Un point du plan A à coordonnées entières est dit visible depuis l'origine O si le segment ouvert $]OA[$ ne contient aucun point à coordonnées entières. Combien y a-t-il de points visibles dans $[0, 25]^2 \setminus \{(0, 0)\}$?

Exercice 56 (résolu par Rémi Varloot). Un iceberg a la forme d'un polyèdre convexe flottant sur la mer. Se peut-il qu'au moins 90% du volume de l'iceberg se trouve en dessous du niveau de l'eau et qu'au moins 50% de sa surface soit au dessus ?

Exercice 57. Trouver tous les nombres de 1 à 100 ayant un nombre impair de diviseurs positifs.

Exercice 58 (résolu par Lucas Boczkowski). Trouver tous $n \in \{1, 2, \dots, 999\}$ tel que n^2 soit égal au cube de la somme des chiffres de n .

Exercice 59 (résolu par Mathieu Aria, Jeanne Nguyen et Thomas Williams). Soient $n \geq 3$ et x_1, \dots, x_{n-1} des entiers positifs ou nuls. On suppose :

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} &= n \\x_1 + 2x_2 + \dots + (n-1)x_{n-1} &= 2n-2.\end{aligned}$$

Calculer la valeur minimale de :

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(2n-k)x_k.$$

Exercice 60 (résolu par Charlotte Le Mouel). Montrer que tout entier naturel peut s'écrire comme la différence de deux entiers ayant le même nombre de diviseurs premiers.

Exercice 61 (résolu par Ambroise Marigot). Trouver tous les polynômes en deux variables $P(x, y)$ tels que pour tous x et y , on ait :

$$P(x+y, y-x) = P(x, y).$$

Exercice 62. Soient A et B deux points du plan et (d) une droite ne coupant pas le segment $[AB]$. Déterminer (géométriquement) le point M de (d) pour lequel l'angle \widehat{AMB} est maximal.

Exercice 63. Soit un cercle \mathcal{C} de centre O et un point A à l'extérieur du cercle. Du point A on trace deux demi-droites : une qui coupe le cercle aux points B et C (dans cet ordre) et l'autre aux points D et E (dans cet ordre également). Montrer que

$$\widehat{CAE} = \frac{\widehat{COE} - \widehat{BOD}}{2}.$$

Exercice 64. Les cercles k_1 et k_2 de centres respectifs O_1 et O_2 sont extérieurement tangents au point C , tandis que le cercle k de centre O est extérieurement tangent à k_1 et k_2 . Soient ℓ la tangente commune à k_1 et k_2 au point C et $[AB]$ le diamètre de k perpendiculaire à ℓ . On suppose que O_1 et A sont du même côté de ℓ . Montrer que les droites (AO_2) , (BO_1) et ℓ sont concourantes.

Exercice 65 (résolu par Philippe Cloarec). Une suite d'entiers (a_n) vérifie $a_{n+1} = a_n^3 + 1999$ pour tout n . Montrer qu'il y a parmi les a_n au plus un carré parfait.

Exercice 66 (résolu par Vincent Langlet). Cinq pierres d'apparence identique ont des masses différentes : notons $m(x)$ la masse de x . Олег connaît les poids des pierres et Дмитрий essaie de les deviner. Pour cela, on convient qu'il peut choisir trois pierres A, B, C et poser la question suivante à Олег : « est-il vrai que $m(A) < m(B) < m(C)$? », qui répond donc par oui ou non. Дмитрий peut-il à coup sûr déterminer l'ordre des pierres par ordre croissant de masse en ne posant que neuf questions ?

Exercice 67 (résolu par Alice Héliou). Un régiment au garde-à-vous est disposé sur une place en un rectangle $n \times m$. L'adjudant choisit le soldat le plus petit dans chaque rang. Le plus grand de ces soldats-là s'appelle Pierre. Ensuite l'adjudant choisit le soldat le plus grand dans chaque colonne. Le plus petit de ces soldats-là s'appelle Paul. Est-ce que Pierre peut être le même soldat que Paul ? Est-ce qu'il peut être plus grand que Paul ? Plus petit que Paul ?

Exercice 68. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ croissantes telles que

$$(2^m + 1)f(n)f(2^m n) = 2^m f(n)^2 + f(2^m n)^2 + (2^m - 1)^2 n$$

pour tous entiers n et m .

Exercice 69 (résolu par Rémi Varloot). $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont deux trapèzes dont les côtés correspondants sont égaux :

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CD = C'D', \quad AD = A'D'.$$

Cependant, dans $ABCD$ c'est les côtés $[AB]$ et $[CD]$ qui sont parallèles, tandis que dans $A'B'C'D'$ ce sont les côtés $[B'C']$ et $[A'D']$. Montrer que les deux trapèzes sont en fait des parallélogrammes.

Exercice 70 (résolu par Dmitry Ivanov). Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que :

$$x^3 = y^3 + 2y^2 + 1.$$

Exercice 71 (résolu par Alexandre Nolin). Existe-t-il un triangle dont le périmètre fait moins de 1 centimètre, tandis que le rayon de son cercle circonscrit excède 1 kilomètre ?

Exercice 72. Trouver les réels $x > -1$, $x \neq 0$ tels que :

$$\frac{x^2}{(x+1-\sqrt{x+1})^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}.$$

Exercice 73 (résolu par Charlotte Le Mouel). Le palais du Minotaure est constitué d'un million de cellules reliées par des couloirs. De chaque cellule part exactement trois couloirs. Le Minotaure, parti d'une des cellules, parcourt son palais, en tournant alternativement à droite et à gauche dans les cellules par lesquelles il passe. Montrer qu'il finira par revenir dans sa cellule de départ.

Exercice 74 (résolu par Anca Arnautu). Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$|f(x+y) + \sin x + \sin y| < 2$$

pour tous réels x et y ?

Exercice 75. Combien y a-t-il de zéros dans le nombre :

$$12345678910111213141516171819202122\dots20062007$$

Exercice 76 (résolu par Rémi Varloot). Soit F_n la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geq 0$. Montrer qu'il existe un $n > 0$ tel que F_n soit un multiple de 2007.

Exercice 77 (résolu par Dmitry Ivanov). On appelle A et B deux sommets opposés d'un cube de côté 1. Quel est le rayon de la sphère centrée à l'intérieur du cube, tangente aux trois faces qui se rencontrent en A et aux trois arêtes qui se rencontrent en B ?

Exercice 78. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Est-il possible de trouver quatre points sur son graphe qui soient les sommets d'un parallélogramme ?

Exercice 79. Si p_1, \dots, p_k sont les diviseurs premiers d'un entier n , on pose $a_n = \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k}$. Montrer que pour tout entier $N \geq 2$:

$$\sum_{n=2}^N a_2 a_3 \cdots a_n < 1.$$

Exercice 80. On colorie les nombres rationnels non nuls en deux couleurs : blanc et noir. On suppose que 1 est colorié en blanc, que x et $x + 1$ ne sont jamais coloriés de la même couleur et que x et $\frac{1}{x}$ ont au contraire toujours la même couleur. Quelle est la couleur de $\frac{1543}{275}$?

Exercice 81. Soit ABC un triangle. On construit extérieurement à celui-ci les carrés $ABED$, $BCGF$ et $ACHI$. Montrer que les points D , E , F , G , H et I sont cocycliques si, et seulement si ABC est équilatéral ou isocèle rectangle.

Exercice 82 (résolu par Jean-Denis Zafar). Soient deux cercles sécants en P et Q . Une droite intersectant le segment $[PQ]$ coupe les cercles en A , B , C et D dans cet ordre. Montrer que $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 83. Dans la fraction :

$$\frac{29 \div 28 \div 27 \div \dots \div 16}{15 \div 14 \div 13 \div \dots \div 2}$$

on place les mêmes parenthèses au numérateur et au dénominateur et on constate que le résultat de l'opération obtenue est un nombre entier. Quel est ce nombre ?

Exercice 84 (résolu par Ambroise Marigot). Pour quels entiers k existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifiant $f(2006) = 2007$ et :

$$f(xy) = f(x) + f(y) + kf(\text{PGCD}(x, y))$$

pour tous entiers x et y ?

Exercice 85. Un quadrilatère convexe $ABCD$ est tel que $\widehat{ABC} + \widehat{BCD} < \pi$. Soit E le point d'intersection des droites (AB) et (CD) . Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ si, et seulement si :

$$AC^2 = CD \cdot CE - AB \cdot AE.$$

Exercice 86. Dans l'écriture décimale de A , les chiffres apparaissent par ordre (strictement) croissant de gauche à droite. Quelle est la somme des chiffres de $9A$?

Exercice 87. Déterminer les 100 premiers chiffres après la virgule de

$$\left(5 + \sqrt{26}\right)^{100}.$$

Exercice 88. Un rectangle $ABCD$ est contenu dans un rectangle $A'B'C'D'$. Est-il possible que le périmètre de P soit plus grand que celui de Q ?

Exercice 89 (résolu par François Caddet et Jean-Alix David). Est-ce que 1 000 000 027 est premier ?

Exercice 90. Montrer que

$$\sin \frac{7\pi}{30} + \sin \frac{11\pi}{30} = \sin \frac{\pi}{30} + \sin \frac{13\pi}{30} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 91 (résolu par Marc Coiffier). Soient A , B , C , D , E , F et G des points du plan tels que $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GA$ et A , B , F , D d'une part et A , G , C , E d'autre part sont alignés. Calculer l'angle \widehat{EAD} .

Exercice 92 (résolu par Rémi Varloot). Montrer que \mathbb{N} peut s'écrire comme l'union de trois ensembles disjoints tels que tous m et n vérifiant $|m - n| \in \{2, 5\}$ n'appartient pas au même ensemble. Montrer que \mathbb{N} peut s'écrire comme l'union de quatre ensembles disjoints tels que tous m et n vérifiant $|m - n| \in \{2, 3, 5\}$ n'appartient pas au même ensemble. Est-il possible de faire cela avec seulement trois ensembles ?

Exercice 93. La suite (x_n) est définie récursivement par $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, et :

$$x_{n+2} = \frac{1 + x_{n+1}}{x_n}$$

pour tout $n \geq 0$. Calculer x_{2007} .

Exercice 94 (résolu par Yrvann Emzivat, William Fujiwara et Amélie Héliou). Soient ABC un triangle acutangle et D , E et F les pieds des hauteurs issues de A , B et C respectivement. Soit P (resp. Q , resp. R) le pied de la perpendiculaire à (EF) (resp. (FD) , resp. (DE)) issue de A (resp. B , resp. C). Montrer que les droites (AP) , (BQ) et (CR) sont concourantes.

Exercice 95 (résolu par Alice Héliou). L'entier naturel A a la propriété suivante : le nombre $1 + 2 + \dots + A$ s'écrit (en base 10) comme le nombre A suivi de trois autres chiffres. Trouver A .

Exercice 96 (résolu par Noémie Combe). Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. Où placer trois points A' , B' et C' sur les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement de telle sorte que le périmètre du triangle $A'B'C'$ soit minimal ?

Exercice 97 (résolu par Ambroise Marigot). Montrer qu'il existe un entier divisible par 2^{100} et ne contenant que des chiffres 8 et 9.

Exercice 98 (résolu par Juliette Fournier). Par combien de zéros peut se terminer le nombre $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$?

Exercice 99. Soient cinq nombres vérifiant les propriétés suivantes :

- ☞ ils sont tous non nuls, et au moins l'un d'entre eux vaut 2007 ;
- ☞ quatre de ces nombres peuvent toujours être réordonnées pour former une suite géométrique.

Quels sont ces nombres ?

Exercice 100 (résolu par Marcus Hanzig). Soient $n \geq 1$ un entier et x_1, \dots, x_n des réels strictement positifs de somme égale à 1. Montrer que :

$$1 \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1+x_1+\dots+x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i+\dots+x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

3.2 Les solutions

Solution de l'exercice 1. Pour $n = 1$, la condition $\{n\sqrt{3}\} > \frac{c}{n\sqrt{3}}$ ne peut être vérifiée que si $\sqrt{3} - 1 > \frac{c}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire seulement si $c < 3 - \sqrt{3}$. Soit $c \in [1, 3 - \sqrt{3}[$ une telle constante. Pour tout n , $\{n\sqrt{3}\}$ est strictement plus grand que $\frac{c}{n\sqrt{3}}$ si et seulement si $n\sqrt{3} - \frac{c}{n\sqrt{3}} > [n\sqrt{3}]$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x). Comme $c < 3 - \sqrt{3} < \sqrt{3} < 3n^2$, les deux côtés de l'inégalité sont positifs, et on peut élever au carré pour obtenir l'inégalité équivalente

$$3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} > [n\sqrt{3}]^2. \quad (\text{III.2})$$

Quel que soit n , $3n^2 - 1$ n'est pas un carré parfait, car aucun carré parfait n'est congru à 2 modulo 3, et $3n^2$ n'est pas non plus un carré parfait. Pour cette raison, $[n\sqrt{3}] = [\sqrt{3n^2}]$, qui est le plus grand entier dont le carré est inférieur ou égal à $3n^2$, est au plus égal à $\sqrt{3n^2 - 2}$, avec égalité si et seulement si $3n^2 - 2$ est un carré parfait. Montrons que cette égalité a lieu pour des entiers aussi grands que l'on veut. Soit $(m_0, n_0) = (1, 1)$ puis $(m_{k+1}, n_{k+1}) = (2m_k + 3n_k, m_k + 2n_k)$. On vérifie facilement que $m_{k+1}^2 - 3n_{k+1}^2 = m_k^2 - 3n_k^2$. Par conséquent, l'égalité $3n_k^2 - 2 = m_k^2$ étant vraie pour $k = 0$, elle reste vraie pour $k \geq 1$. De plus, la suite (n_k) étant strictement croissante, on en déduit ce que l'on voulait montrer. Ces résultats en poche, intéressons-nous maintenant aux deux questions de notre énoncé.

Tout d'abord, si $c = 1$, on a

$$3n^2 - 2 + \frac{1}{3n^2} > 3n^2 - 2 \geq [n\sqrt{3}]^2$$

pour tout n , ce qui montre l'égalité (III.2), équivalente à l'égalité que l'on voulait montrer. Si $c > 1$, alors, pour n suffisamment grand,

$$3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} \leq 3n^2 - 2.$$

En outre, pour une infinité de n , on a $3n^2 - 2 = [n\sqrt{3}]^2$, et donc pour ces n , l'inégalité (III.2) n'est pas vérifiée. Il n'existe donc pas de $c > 1$ vérifiant l'inégalité de l'énoncé.

Solution de l'exercice 2. L'application $f : x \mapsto \frac{n}{x}$ réalise une bijection de l'ensemble des diviseurs positifs de n . Ainsi D est aussi égal au produit des $f(x)$ pour x diviseur de n , ce qui s'écrit encore $D = \frac{n^d}{D}$. Le résultat s'ensuit.

Solution de l'exercice 3. Remarquons tout d'abord que si $a \star b = a \star d$, alors $a + b + c = (a \star b) \star c = (a \star d) \star c = a + d + c$, d'où $b = d$. De même, si $a \star b = d \star b$, alors $a = d$. Montrons maintenant que $a \star b = b \star a$. Pour cela, posons $d_1 = a \star b$ et $d_2 = b \star a$. Alors $d_1 \star c = a + b + c = b + a + c = d_2 \star c$, et ainsi $d_1 = d_2$. Posons à présent $x = a \star 0$. On a $x \star 0 = a + 0 + 0 = a$. Donc $2x = (x \star 0) \star x = a \star x = x \star a = (a \star 0) \star a = 2a$, ce qui implique $x = a$, c'est-à-dire $a \star 0 = a$. Pour tous a et b , $a + b = (a \star b) \star 0 = a \star b$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4. Pour tous $y > x$, $f(y) \geq f(x) + f(y - x) \geq f(x)$, donc f est croissante. Par ailleurs, une récurrence immédiate donne $f(2^{-k}) \leq 2^{-k}$ pour tout entier k . Pour $x \in]0, 1]$, soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^{-k} < x \leq 2^{-(k-1)}$; alors $f(x) \leq f(2^{-(k-1)}) \leq 2^{-(k-1)} < 2x$. Comme $f(0) + f(1) \leq f(1)$, on a $f(0) = 0$ et donc $f(x) \leq 2x$ dans tous les cas.

Solution de l'exercice 5. Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Alors si $B \subset C \subset A$ vérifient $f(C) \in B$, on a $f(C) = f(B \cup (C \setminus B)) \in \{f(B), f(C \setminus B)\}$. Mais $f(C) \notin C \setminus B$, donc $f(C) \in f(B)$. Ce qui montre que $f(C) = f(B)$. Nous allons numérotter les éléments de A de la façon suivante. Posons $a_1 = f(A)$. Alors, pour tout $B \subset A$ contenant a_1 , $f(B) = a_1$ d'après l'argument précédent. Posons maintenant $a_2 = f(A \setminus \{a_1\})$. Alors pour tout $B \subset A$ tel que $a_1 \notin B$ et $a_2 \in B$, on a $f(B) = a_2$. De même, en posant $a_3 = f(A \setminus \{a_1, a_2\})$, pour tout B tel que $a_1, a_2 \notin B$ et $a_3 \in B$, alors $f(B) = a_3$. On définit a_4 et a_5 de manière similaire. Inversement, si on a choisi une numérotation a_1, \dots, a_5 des éléments de A , on peut lui associer une fonction de la manière suivante : pour tout $B \in A$, on définit $f(B)$ comme étant égal à $a_i \in B$ avec i minimal. Ces fonctions sont toutes distinctes, et on vérifie facilement qu'elles respectent les conditions de l'énoncé. Finalement, il y a autant de telles fonctions que de manières de numérotter les 5 éléments de A , c'est-à-dire $5! = 120$.

Solution de l'exercice 6. Montrons par récurrence sur n qu'il existe un entier N divisible par 2^{100} et ayant ses n derniers chiffres non nuls. Pour $n = 1$, il suffit de prendre $N = 2^{100}$. Maintenant, soit N un entier divisible par 2^{100} et ayant ses n derniers chiffres non nuls. Si son $(n + 1)$ -ième chiffre en partant de la fin est également non nul, alors on peut prendre le même entier pour $n + 1$. Sinon, on prend

$N' = N + 2^{100} \cdot 10^n$. Ainsi, en 100 étapes, on obtient un entier divisible par 2^{100} dont les 100 derniers chiffres sont non nulles. Il suffit alors de ne garder que ces 100 derniers chiffres, car 10^{100} est divisible par 2^{100} .

Solution de l'exercice 7. Remarquons en premier lieu que le cas $n = 1$ est trivial. On supposera donc $n \geq 2$. Notons $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $X_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,n})$. La condition énoncée peut se redire de la façon suivante :

$$\forall i \in \{1, \dots, 2^n - 1\}, \quad \text{PGCD}(x_1 - x_{i,1}, \dots, x_n - x_{i,n}) = 1$$

ce qui est encore équivalent à :

$$\forall i \in \{1, \dots, 2^n - 1\}, \forall p \text{ premier}, \quad (x_1, \dots, x_n) \not\equiv (x_{i,1}, \dots, x_{i,n}) \pmod{p}.$$

Notons maintenant p_k le k -ième nombre premier et essayons de résoudre ce système de congruences en se limitant aux s premiers nombres premiers, avec $p_1 \dots p_s > \max |x_{i,j}|$. On obtient :

$$(S) : \begin{cases} (x_1, \dots, x_n) \equiv (y_{1,1}, \dots, y_{1,n}) \pmod{p_1} \\ (x_1, \dots, x_n) \equiv (y_{2,1}, \dots, y_{2,n}) \pmod{p_2} \\ \vdots \\ (x_1, \dots, x_n) \equiv (y_{s,1}, \dots, y_{s,n}) \pmod{p_s} \end{cases}$$

où $(y_{k,1}, \dots, y_{k,n}) \not\equiv (x_{i,1}, \dots, x_{i,n}) \pmod{p_k}$ pour tout k et pour tout i . À k fixé, il existe donc au moins $p_k^n - 2^n + 1$ possibilités différentes modulo p_k pour le choix de $(y_{k,1}, \dots, y_{k,n})$. Ainsi il existe au moins :

$$A_s = \prod_{k=1}^s (p_k^n - 2^n + 1)$$

systèmes de congruences classiques qui fournissent une solution de (S). D'après le lemme chinois, à chacun d'entre eux correspond une solution telle que pour tout i , $1 \leq x_i \leq p_1 \dots p_s$. La dernière inégalité prouve que si p est un nombre premier plus grand que $p_1 \dots p_s$, alors $(x_1, \dots, x_n) \not\equiv (x_{i,1}, \dots, x_{i,n}) \pmod{p}$ (car sinon il y aurait réellement égalité et il y aurait déjà égalité modulo 2 par exemple, ce qui est supposé faux). Reste donc à étudier les nombres premiers compris entre p_s et $p_1 \dots p_s$. Soit donc p un nombre premier compris entre p_s et $p_1 \dots p_s$. Le nombre de n -uplets pour lesquels la condition de congruence modulo p n'est pas satisfaite est majoré par $(2^n - 1) \left(\frac{p_1 \dots p_s}{p} + 1 \right)$. Ainsi le nombre de n -uplets qui vont être rejetés par les conditions de congruence modulo p , pour $p_s < p < p_1 \dots p_s$, est majoré par :

$$B_s = (2^n - 1) \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p_s < p < p_1 \dots p_s}} \left(\frac{p_1 \dots p_s}{p} + 1 \right)$$

Il suffit pour conclure de prouver que $B_s < A_s$ pour s suffisamment grand. C'est ce que nous allons faire. On a d'une part :

$$A_s = \prod_{k=2}^s (p_k^n - 2^n + 1) \geq \prod_{k=2}^s \left(\frac{p_k}{3} \right)^n = \frac{3}{2} \left(\frac{p_1}{3} \dots \frac{p_s}{3} \right)^n$$

et d'autre part :

$$B_s \leq 2(2^n - 1)(p_1 \dots p_s) \sum_{p=1}^{p_1 \dots p_s} \frac{1}{p} \leq 4(2^n - 1)(p_1 \dots p_s)^{3/2}$$

Ainsi :

$$\frac{A_s}{B_s} \geq C \frac{p_1^{n-3/2}}{3^n} \dots \frac{p_s^{n-3/2}}{3^n} \quad \text{où } C \text{ est une constante ne dépendant que de } n$$

et cette quantité peut être rendue arbitrairement grande dès que $n \geq 2$.

Solution de l'exercice 8. Notons

$$\frac{p_n}{q_n} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{2}}}}$$

où la fraction contient n fois le chiffre 2 et p_n et q_n sont premiers entre eux. Il est alors facile à vérifier que

$$p_n = p_{n-1} + 2q_{n-1}, \quad q_n = p_{n-1} + q_{n-1}.$$

Ou, de manière équivalente,

$$p_{n-1} = 2q_n - p_n, \quad q_{n-1} = p_n - q_n.$$

D'autre part, (p, q) est une solution de $p^2 - 2q^2 = \pm 1$ si et seulement si $(2q - p, p - q)$ est également solution. En effet,

$$(2q - p)^2 - 2(p - q)^2 = 4q^2 - 4qp + p^2 - 2p^2 + 4pq - 2q^2 = 2q^2 - p^2.$$

Si (p, q) est une solution avec $p > 1$, on a nécessairement $p > q$ et donc $2q - p < p$. Ainsi en répétant l'opération

$$(p, q) \mapsto (2q - p, p - q)$$

on obtient en un nombre fini n d'étapes une solution avec $p = 1$, donc la solution $p = q = 1$. Or on a aussi $p_0 = q_0 = 1$. Par conséquent, en inversant les n étapes, on prouve par récurrence que $(p, q) = (p_n, q_n)$. Inversement, comme $(p_0, q_0) = (1, 1)$ est une solution, alors, par récurrence, (p_n, q_n) est solution pour tout n .

Solution de l'exercice 9. Écrivons P sous la forme $P(x) = a_n x^n + \dots + a_0$. Si $a_0 = 0$, le résultat est immédiat. Supposons donc que $a_0 \neq 0$. Quitte à remplacer $P(x)$ par $\frac{P(a_0 x)}{a_0}$, on peut supposer que $a_0 = 1$, ce que nous allons faire. Nous allons raisonner par l'absurde et donc supposer qu'il n'existe qu'un nombre fini de nombres premiers p pour lesquels on peut trouver un entier x tel que $P(x)$ soit un multiple de p . Notons N le produit de tous ces nombres premiers. Considérons un entier x tel que $|P(Nx)| > 1$ et considérons un diviseur premier p de $P(Nx)$. Par définition p divise N mais alors $P(Nx) \equiv a_0 = 1 \pmod{p}$, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 10. Pour $m = n = 1$ c'est le premier joueur qui perd dès son premier coup. Dans tous les autres cas il a une stratégie gagnante. Nous allons le démontrer sans exhiber la stratégie elle-même. Notons d'abord qu'il s'agit d'un jeu fini et donc l'un des joueurs a nécessairement une stratégie gagnante. Supposons que c'est le deuxième joueur. Nous recommandons alors au premier joueur de hacher juste une case : le coin en haut à droite du rectangle. Si notre supposition est correcte, le deuxième joueur a alors un coup gagnant. Mais dans ce cas, le premier joueur peut « retirer » son premier coup et faire le coup gagnant à la place du deuxième joueur. Quel que soit ce coup, le coin en haut à droite du rectangle sera automatiquement hachuré. Donc le premier joueur peut maintenant utiliser la soi-disant stratégie gagnante du deuxième joueur pour gagner. Cette contradiction montre que c'est le premier joueur qui a une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 11. Tout d'abord, l'équation implique $0 \leq x^3 < 1$, c'est-à-dire $0 \leq x < 1$. Elle assure également que $(x+1)^3$ et x^3 ont la même partie décimale, c'est-à-dire qu'ils diffèrent d'un entier. On est ainsi amené à résoudre $3x^2 + 3x = k$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) et à ne retenir que les solutions comprises entre 0 et 1. Or, le discriminant de l'équation précédente est $\Delta = 9 + 12k$; il est positif pour $k \geq 0$ (on rappelle que k est entier) et les solutions de l'équation s'écrivent dans ce cas :

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 12k}}{6}.$$

On remarque que le choix du signe $-$ conduit à un x négatif, ce qui est exclu. De plus pour que la solution n'excède pas 1, on doit prendre $k \leq 5$. Cela fournit six solutions potentielles à l'équation de départ dont on vérifie sans mal qu'elles conviennent toutes.

Solution de l'exercice 12. Le côté de longueur 10 est strictement plus grand que la somme des longueurs de deux autres côtés. L'inégalité triangulaire assure qu'un tel quadrilatère ne peut exister.

Solution de l'exercice 13. L'hypothèse nous dit que les deux polynômes, disons P_1 et P_2 s'écrivent respectivement $P_1(x) = (x - a)Q_1(x)$ et $P_2(x) = (x - a)Q_2(x)$ où a est un certain entier strictement négatif et où Q_1 et Q_2 sont des polynômes à coefficients entiers. S'il existait un entier $b > 0$ tel que $P_1(b) = 2007$ et $P_2(b) = 2008$, $b - a$ devrait diviser simultanément 2007 et 2008, et donc leur différence 1. Mais cela n'est pas possible car $b - a > 1$ du fait que $b > 0$ et $a < 0$.

Solution de l'exercice 14. Choisissons la face F pour laquelle la longueur PP_F est la plus petite possible (s'il y a plusieurs faces comme cela, on peut en prendre une quelconque). Nous affirmons que P_F se trouve alors dans la face F . En effet, si le segment $[PP_F]$ coupe une autre face F' en un point P' , alors on a $PP_{F'} < PP' < PP_F$ en contradiction avec le choix de F .

Solution de l'exercice 15. À chaque étape le côté du nouveau carré a toujours une longueur strictement supérieure à 1 puisque c'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'un des autres côtés mesure 1. Ainsi, la construction est toujours possible quelle que soit la valeur de a .

Solution de l'exercice 16. Soient $a_n = \cos(n\pi x)$ et $b_n = \cos(n\pi y)$. On a

$$(a_n + b_n)^2 + (a_n - b_n)^2 = 2(a_n^2 + b_n^2) = 2 + (a_{2n} + b_{2n}).$$

Si $(a_n + b_n)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, il s'ensuit que $(a_n - b_n)$ ne prend aussi qu'un nombre fini de valeurs, et c'est donc aussi le cas de (a_n) et (b_n) . En particulier, il existe $n > m$ tels que $a_m = a_n$. Ainsi, soit $(n - m)\pi x$, soit $(n + m)\pi x$ est un multiple entier de π , ce qui montre que x est rationnel. De même, y est aussi rationnel.

Solution de l'exercice 17. Supposons que x_n compte au plus k chiffres, i.e. $x_n < 10^k$. Ainsi $11x_n < 11 \times 10^k$, ce qui montre que l'on est dans l'alternative suivante :

- ☞ soit $11x_n$ compte au plus $k + 1$ chiffres : dans ce cas, x_{n+1} compte au plus k chiffres ;
- ☞ soit $11x_n$ compte $k + 2$ chiffres, et il commence par 10 : dans ce cas, x_{n+1} est obtenu en supprimant le premier 1, et comme le 0 suivant se supprime tout seul, la conclusion reste que x_{n+1} compte au plus k chiffres.

Dans tous les cas, donc, x_{n+1} a au plus k chiffres. Par récurrence, on montre donc que x_n n'a jamais plus de chiffres que n'en a x_1 . La suite est donc bornée.

Solution de l'exercice 18. Posons pour tout i , $c_i = f_i(1)$. Pour tout entier m et réel x ,

$$a(1 + mx)^n = \prod_{i=1}^n f_i(1 + mx) = \prod_{i=1}^n [c_i + mf_i(x)].$$

Supposons dans un premier temps que $a \neq 0$. Dans ce cas, $c_i \neq 0$ pour tout i . Fixons $x \in \mathbb{R}$. Les polynômes (en T) $\prod_{i=1}^n [c_i + Tf_i(x)]$ et $a(1 + Tx)^n$ coïncident sur un nombre infini de valeurs (sur \mathbb{N}) et donc sont égaux en tant que polynômes. Les facteurs étant tous de degré 1, l'unicité de la factorisation entraîne $c_i + f_i(x)T = b_i(1 + xT)$, pour certains réels b_i (dépendant *a priori* de x). Par identification des coefficients, il reste $b_i = c_i$ et $f_i(x) = b_i x$. On en déduit $f_i(x) = c_i x$, et ceci est vrai pour tout réel x . Supposons maintenant $a = 0$. Nous voulons montrer qu'il existe un indice i tel que la fonction f_i soit identiquement nulle. Supposons le contraire et considérons des réels a_1, \dots, a_n tels que $f_i(a_i) \neq 0$

pour tout i . Pour tout entier m , posons $x_m = a_1 + ma_2 + \dots + m^{n-1}a_n$. Comme $\prod_{i=1}^n f_i(x_m) = 0$, il existe i tel que $f_i(x_m) = 0$. Comme les indices i sont en nombre fini, il en existe un tel que $f_i(x_m) = 0$ pour une infinité de valeur de m . Or :

$$f_i(x_m) = f_i(a_1) + mf_i(a_2) + \dots + m^{n-1}f_i(a_n)$$

est un polynôme non nul en m . Il est donc impossible qu'il s'annule une infinité de fois.

Solution de l'exercice 19. L'année prochaine, Pierre fêtera son 13-ième anniversaire. L'année en cours, il fêtera donc ou a déjà fêté son 12-ième anniversaire. Donc il a soit 11 soit 12 ans. Vu qu'il en avait 10 avant-hier, il en a en fait 11 maintenant. Ce qui implique deux choses : (1) il a eu son anniversaire hier ou aujourd'hui ; (2) il n'a pas encore fêté son anniversaire cette année. Ainsi son anniversaire était hier et c'était l'année dernière. Donc hier on était le 31 décembre et aujourd'hui le 1 janvier.

Solution de l'exercice 20. Considérons la suite (b_n) telle que $0 \leq b_n \leq 3$ et $b_n \equiv a_n \pmod{4}$. Comme 4 divise 100, (b_n) vérifie la relation de récurrence $b_{n+2} \equiv b_n + b_{n+1} \pmod{4}$. On remarque que la suite (b_n) est périodique, la séquence 3, 2, 1, 3, 0, 3 se répétant 334 fois jusqu'à 2004. De plus, si $a \equiv b \pmod{4}$, alors $a^2 \equiv b^2 \pmod{8}$. En effet, en écrivant $a = b + 4k$, on a $a^2 = (b + 4k)^2 = b^2 + 8kb + 16k^2$. On en déduit que $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2007}^2 \equiv 334(1 + 4 + 1 + 1 + 0 + 1) + 1 + 4 + 1 \equiv 6 \pmod{8}$. La réponse à la question est donc 6.

Solution de l'exercice 21. L'égalité implique directement que n est un carré, il s'écrit donc sous la forme $n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_d^{2\alpha_d}$ où les α_i sont des entiers strictement positifs et les p_i des nombres premiers deux à deux distincts. Dans ce cas, on a la formule suivante usuelle pour $d(n)$:

$$d(n) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \dots (2\alpha_d + 1).$$

On remarque tout d'abord qu'elle implique que $d(n)$ est impair, et donc par l'égalité $n = d(n)^2$, n est aussi impair. Autrement dit, le nombre premier 2 n'apparaît pas parmi les p_i , i.e. $p_i \geq 3$ pour tout i . On a :

$$1 = \frac{d(n)}{\sqrt{n}} = \frac{2\alpha_1 + 1}{p_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{2\alpha_2 + 1}{p_1^{\alpha_2}} \dots \frac{2\alpha_d + 1}{p_1^{\alpha_d}}.$$

En utilisant $p_i \geq 3$, on montre sans grande difficulté que chacun des facteurs précédents est supérieur à 1 et que l'égalité est atteinte seulement si $p_i = 3$ et $\alpha_i \in \{1, 2\}$. Ceci ne laisse que deux possibilités pour n , à savoir 1 et 9. On vérifie qu'elles conviennent toutes les deux.

Solution de l'exercice 22. Soit n l'entier tel que $2^{n-1} \leq k < 2^n$. Pour $n \leq 5$, le résultat se vérifie à la main. Supposons $n \geq 6$. Soit S l'ensemble des entiers positifs strictement plus petits que 10^n dont tous les chiffres sont des 1 ou des 0. Le cardinal de S est égal à 2^n qui est strictement plus grand que k , donc il existe $a < b$ dans S congrus modulo k , et $b - a$ ne peut avoir pour chiffres que 8, 9, 0 et 1 dans son écriture décimale. De plus, $b - a \leq b < 10^n < 16^{n-1} \leq k^4$. Donc $b - a$ répond à la question.

Solution de l'exercice 23. Remarquons tout d'abord que quitte à tout translater, on peut supposer que $x_1 = 0$. Supposons dans un premier temps que les x_i sont des entiers. Dans ce cas, si I est un sous-ensemble de $\{1, \dots, 2007\}$ de cardinal 7, alors $11 \sum_{i \in I} x_i \equiv 0 \pmod{7}$ et donc, puisque 7 et 11 sont premiers entre eux, $\sum_{i \in I} x_i \equiv 0 \pmod{7}$. On en déduit que pour tout i , $x_i \equiv x_0 \equiv 0 \pmod{7}$, c'est-à-dire que tous les x_i sont des multiples de 7. Bien entendu la famille des $\frac{x_i}{7}$ est encore solution du problème. Par descente infinie, on montre finalement que tous les x_i sont nuls, ce qui est bien ce que l'on voulait. Traitons maintenant le cas général. On procède par approximation. Prenons une famille (x_i) de réels. Notons N un entier strictement positif et supérieur à tous les inverses des $|x_i|$ pour x_i non nul. En appliquant le principe des tiroirs, on obtient un entier strictement positif D et des entiers

relatifs p_i tels que $|Dx_i - p_i| \leq \frac{1}{155N}$ pour tout i . Montrons que la famille des p_i satisfait encore aux hypothèses de l'énoncé. Prenons donc I un sous-ensemble de $\{1, \dots, 2007\}$ de cardinal 7. Alors on peut trouver un sous-ensemble J de $\{1, \dots, 2007\}$ de cardinal 11 tel que :

$$11 \sum_{i \in I} Dx_i = 7 \sum_{j \in J} Dx_j$$

Évaluons :

$$\begin{aligned} \left| 11 \sum_{i \in I} p_i - 7 \sum_{j \in J} p_j \right| &= \left| 11 \sum_{i \in I} (p_i - Dx_i) - 7 \sum_{j \in J} (p_j - Dx_j) \right| \\ &\leq 11 \sum_{i \in I} |p_i - Dx_i| + 7 \sum_{j \in J} |p_j - Dx_j| \leq \frac{154}{155N} < 1 \end{aligned}$$

On en déduit l'égalité attendue, étant donné que le nombre dans le membre de gauche est un entier. Par le cas précédent, tous les p_i sont nuls et donc que $|x_i| \leq |Dx_i| \leq \frac{1}{155N}$, ce qui est impossible si $x_i \neq 0$ par définition de N .

Solution de l'exercice 24. La constatation essentielle est la suivante : un triangle a ses trois angles aigus si, et seulement si le centre de son cercle circonscrit est à l'intérieur du triangle. Ici, tous les triangles du pavage ont le même cercle circonscrit, disons Γ , qui est celui qui passe par tous les points du polygone régulier. Ainsi, il s'agit de montrer qu'il y a un et un seul triangle du pavage qui contient le centre O de Γ en son intérieur. Cela est évident, le seul problème pouvant survenir est que O appartienne à l'un des côtés. Mais ceci n'est pas possible puisque le polygone a un impair de côtés, et donc aucune de ses « diagonales » ne passe par le centre.

Solution de l'exercice 25. En dépliant la ligne brisée, on se rend compte qu'elle a la même longueur que la diagonale d'un carré de côté 1. C'est donc $\sqrt{2}$.

Solution de l'exercice 26. Soit r_n le rayon de Γ_n et d_n son diamètre. Posons $s_n = d_1 + d_2 + \dots + d_n$, et soit x_n l'abscisse positive du point de tangence de Γ_n et de \mathcal{P} (Γ_n est tangent à \mathcal{P} en (x_n, x_n^2) et $(-x_n, x_n^2)$). Alors, le centre de Γ_n est $(0, s_{n-1} + r_n)$. La pente de la droite tangente à \mathcal{P} en (x_n, x_n^2) est $2x_n$, et la pente de la droite normale est $-\frac{1}{2x_n}$. Or, le centre de Γ_n est sur cette normale, donc $\frac{x_n^2 - (s_{n-1} + r_n)}{x_n - 0} = -\frac{1}{2x_n}$, et $x_n^2 - s_{n-1} - r_n = -\frac{1}{2}$. En outre, $r_n^2 = (x_n - 0)^2 + (x_n^2 - s_{n-1} - r_n)^2$, donc $x_n^2 = r_n^2 - \frac{1}{4}$ et $r_n^2 - r_n - s_{n-1} + \frac{1}{4} = 0$. La résolution de cette équation donne $r_n = \frac{1 + 2\sqrt{s_{n-1}}}{2}$ et $d_n = 1 + 2\sqrt{s_{n-1}}$. Puis on montre par récurrence forte que $d_n = 2n - 1$. La réponse à la question est donc 4013.

Solution de l'exercice 27. Introduisons sur le plan un système de coordonnées avec l'origine au centre du polygone. Soit un segment $[AB]$ et un point P , de coordonnées (x, y) , situé dans un demi-plan, choisi une fois pour toutes, par rapport au segment $[AB]$. Considérons l'aire du triangle ABP en tant que fonction de x et y . Il est facile à voir que cette fonction est de la forme $ax + by + c$, où a, b, c sont des constantes réelles. Revenons à notre problème. Soit P le point de l'énoncé, choisi à l'intérieur du $2n$ -gone. La valeur

$$(\text{aire des triangles noirs}) - (\text{aire des triangles blancs})$$

peut être considérée comme une fonction de (x, y) , les coordonnées de P . Elle est donc également de la forme $f(x, y) = ax + by + c$, car somme de plusieurs fonctions de cette forme-là. Si $x = y = 0$, le point P se trouve au centre du polygone, donc $f(x, y) = 0$ par symétrie. Ainsi f est de la forme $f(P) = \vec{OP} \cdot \vec{v}$, où \vec{v} est le vecteur de coordonnées (a, b) . Mais par symétrie, f est invariant par rotation d'angle $2\pi/n$. Donc le vecteur \vec{v} doit être invariant par cette rotation. Autrement dit, $\vec{v} = 0$, donc f est identiquement nulle.

Solution de l'exercice 28. Posons $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \sqrt{xy}$. L'inégalité se réécrit

$$\frac{b^2}{a} + \sqrt{2a^2 - b^2} \geq a + b$$

ou encore $\sqrt{2a^2 - b^2} \geq a + b - \frac{b^2}{a}$. En élevant au carré, et après calcul, on obtient l'inégalité équivalente

$$a^4 - b^4 \geq 2a^3b - 2ab^3$$

c'est-à-dire

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \geq 2ab(a^2 - b^2).$$

Pour a et b strictement positifs, on a toujours $a \geq b$ d'après l'inégalité arithmético-géométrique, et donc si $a \neq b$ l'inégalité précédente est encore équivalente à

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0$$

qui est encore vraie pour $a = b$. Ceci conclut.

Solution de l'exercice 29. Soit A un sous-ensemble de X ne contenant aucun des A_i , et de cardinal maximal. Soit k ce cardinal. Par hypothèse, pour tout $x \in X \setminus A$, il existe $i(x) \in \{1, \dots, m\}$ tel que $A_{i(x)} \subset A \cup \{x\}$, sinon l'ensemble $A \cup \{x\}$ vérifierait lui aussi la condition et A ne serait pas de cardinal maximal. Soit $L_x = A \cap A_{i(x)}$, qui, d'après l'observation précédente, est de cardinal 2. Comme le cardinal de $A_i \cap A_j$ est inférieur ou égal à 1 pour tous $i \neq j$, les L_x pour $x \in X \setminus A$ doivent être tous distincts. Or, il y a $\binom{k}{2}$ sous-ensembles distincts de A de 2 éléments, et $n - k$ ensembles L_x . On en déduit que $n - k \leq \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$. D'où $k^2 + k \geq 2n$. Mais alors $k \geq \lceil \sqrt{2n} \rceil$; en effet, si on avait $k < \lceil \sqrt{2n} \rceil$, on aurait $k \leq \sqrt{2n} - 1$ et donc $k^2 + k \leq 2n - \sqrt{2n} < 2n$.

Solution de l'exercice 30. En appliquant l'équation à $x = y = 0$, on a $f(0) = 0$. Avec $y = 0$, on trouve $f(x^3) = xf(x)^2$, ou de manière équivalente,

$$f(x) = x^{1/3} f(x^{1/3})^2.$$

En particulier, x et $f(x)$ ont toujours le même signe. Soit S l'ensemble défini par

$$S = \{a > 0, f(ax) = af(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

On a évidemment $1 \in S$. Montrons que si $a \in S$, alors $a^{1/3} \in S$. En fait,

$$axf(x)^2 = af(x^3) = f(ax^3) = f((a^{1/3}x)^3) = a^{1/3}xf(a^{1/3}x)^2$$

et donc

$$[a^{1/3}f(x)]^2 = f(a^{1/3}x)^2.$$

Comme x et $f(x)$ ont le même signe, $f(a^{1/3}x) = a^{1/3}f(x)$. Montrons maintenant que si $a, b \in S$, alors $a + b \in S$:

$$\begin{aligned} f((a+b)x) &= f((a^{1/3}x^{1/3})^3 + (b^{1/3}x^{1/3})^3) \\ &= (a^{1/3} + b^{1/3})[f(a^{1/3}x^{1/3})^2 - f(a^{1/3}x^{1/3})f(b^{1/3}x^{1/3}) + f(b^{1/3}x^{1/3})^2] \\ &= (a^{1/3} + b^{1/3})(a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3})x^{1/3}f(x^{1/3})^2 \\ &= (a+b)f(x). \end{aligned}$$

On conclut par une récurrence immédiate que $S = \mathbb{N}^*$ et en particulier, $f(2007x) = 2007f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 31. Écrivons $a = 2^c p$ et $b = 2^d q$, avec p et q impairs. On peut supposer sans perte de généralité que $c \geq d$. Alors $36a + b = 36 \cdot 2^c p + 2^d q = 2^d (36 \cdot 2^{c-d} p + q)$. Donc $(36a + b)(36b + a) = 2^d (36 \cdot 2^{c-d} p + q)(36b + a)$ a le facteur impair non trivial $36 \cdot 2^{c-d} p + q$, et n'est pas une puissance de 2.

Solution de l'exercice 32. Notons n le nombre de faces. Considérons une face du polyèdre. Elle a au moins 3 côtés. D'autre part, à chacun de ses côtés, il correspond une autre face du polyèdre (celle qui partage le côté en question) et à des côtés différents, il correspond deux faces différentes. Ceci prouve que notre face a au plus $n - 1$ côtés. Il y a donc n faces et $n - 3$ possibilités pour le nombre de côtés. Le principe des tiroirs permet de conclure.

Solution de l'exercice 33. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de multiples de 7 dans la suite, et soit a_k le dernier multiple de 7 (notons que $k \geq 5$ car $a_5 = 7$). On peut remarquer qu'alors

$$a_{2k-1} \equiv a_{2k} \equiv a_{2k+1} \equiv a \not\equiv 0 \pmod{7}.$$

Puis, les sept éléments à partir de a_{4k-3} vont avoir des résidus distincts modulo 7. En effet, pour $n = 0, 1, \dots, 6$, $a_{4k-3+n} \equiv a_{4k-3} + na \pmod{7}$, et quel que soit $a \not\equiv 0 \pmod{7}$, na parcourt $\{1, 2, \dots, 6\}$ modulo 7 lorsque n parcourt ce même ensemble. Donc l'un de ces éléments au moins est un multiple de 7, ce qui est une contradiction avec le fait que a_k soit le dernier.

Solution de l'exercice 34. En prenant $x = y$, on obtient $f(0) = 0$. Puis avec $x = -1$ et $y = 0$, on a $f(1) = -f(-1)$. Avec, d'une part, $y = 1$, d'autre part, $y = -1$, on a pour tout x

$$f(x^2 - 1) = (x - 1)(f(x) + f(1)),$$

$$f(x^2 - 1) = (x + 1)(f(x) - f(1)).$$

De l'égalité $(x - 1)(f(x) + f(1)) = (x + 1)(f(x) - f(1))$, on tire $f(x) = f(1)x$. Donc toute fonction vérifiant l'équation est une fonction linéaire. Inversement, toute fonction de la forme $f(x) = kx$ vérifie cette équation.

Solution de l'exercice 35. La composée des deux symétries centrales est une translation de vecteur $\vec{v}(a, b)$ (non nul) qui laisse encore globalement invariant le graphe de f . Comme ce dernier ne peut contenir deux points de même abscisse (puisque f est une fonction), on a nécessairement $a \neq 0$. En terme de fonctions, l'invariance par translation se traduit par l'égalité $f(x + a) = f(x) + b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit que la fonction g définie par $g(x) = f(x) - bx$ est périodique de période a . Au final, f s'écrit comme la somme d'une fonction linéaire et d'une fonction périodique.

Solution de l'exercice 36. Une méthode¹² consiste à introduire une suite auxiliaire (b_n) définie par récurrence comme suit :

$$b_0 = x \quad ; \quad b_{n+1} = 2a_n b_n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Une récurrence immédiate implique les relations $a_n^2 - b_n^2 \equiv 1 \pmod{p}$ et $a_n + b_n \equiv (2 + x)^{2^n} \pmod{p}$ pour tout n . Appliquées à $n = N$, celles-ci fournissent $b_N^2 \equiv -1 \pmod{p}$ et $(2 + x)^{2^N} \equiv b_N \pmod{p}$. Il s'ensuit $(2 + x)^{2^{N+1}} \equiv -1 \pmod{p}$, ce qui assure que l'ordre de $2 + x$ modulo p est exactement 2^{N+2} (car p est impair, a_N l'étant aussi). La divisibilité souhaitée en résulte. *Remarque.* La méthode précédente se généralise lorsque l'hypothèse $x^2 \equiv 3 \pmod{p}$ est supprimée. Il faut alors travailler dans le corps fini à p^2 éléments et la conclusion devient 2^{N+3} divise $p^2 - 1$ (ce qui est légèrement plus faible).

12. Malgré les apparences, cette méthode n'est pas introuvable. Le point de départ est la remarque selon laquelle la relation de récurrence ressemble à la formule du cosinus de l'angle double (ou du cosinus hyperbolique pour ceux qui connaissent). La suite introduite b_n correspond alors (modulo p) à la suite des $i \times$ sinus correspondants (ou à la suite des sinus hyperboliques). La relation $a_n^2 - b_n^2 \equiv 1 \pmod{p}$ est alors attendue, ainsi que l'expression particulièrement simple de $a_n + b_n$ liée au fait que celle-ci s'exprime comme une exponentielle complexe (ou une exponentielle).

Solution de l'exercice 37. Par symétrie des rôles, on peut supposer $p \leq q$. On a $2^{3pq} \equiv 2 \pmod{3}$, ce qui implique que p et q sont impairs (sinon 2^{3pq} serait congru à 1). Comme q est premier, on a $x^{3pq-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Rappelons le résultat suivant¹³ : il existe un entier x tel que pour tout n , on ait :

$$x^n \equiv 1 \pmod{q} \iff n \text{ est multiple de } q-1.$$

D'après ce résultat et la congruence précédente, on déduit que $q-1$ divise $3pq-1$. En outre, $3pq-1-3p(q-1)=3p-1$, donc $q-1$ divise $3p-1$, et de même, $p-1$ divise $3q-1$. Supposons que $p=q$. Dans ce cas, $p-1$ divise $3p-1$, or $3p-1-3(p-1)=2$ donc $p-1$ divise 2, d'où $p=q=3$. Mais $4^{27} \equiv 1 \pmod{27}$, donc (3,3) n'est pas solution. On a alors $p \neq q$. Quitte à échanger p et q , on peut supposer $p < q$. Alors, comme p et q sont impairs, on a $q \geq p+2$, et donc l'entier $\frac{3p-1}{q-1}$ est strictement inférieur à 3. De plus, il est clairement différent de 1, et est donc égal à 2, c'est-à-dire que $2q=3p+1$. Or, $p-1$ divise $3q-1$, donc aussi $6q-2=9p+1$ puis $(9p+1)-9(p-1)=10$. Il reste les deux possibilités (3,5) et (11,17). Mais $3^{45} \equiv 0 \pmod{45}$ donc (3,5) n'est pas solution du problème. Enfin, montrons que (11,17) est solution. D'après le théorème chinois, il suffit de démontrer que $x^{3 \times 11 \times 17} \equiv x \pmod{3}$, $x^{3 \times 11 \times 17} \equiv x \pmod{11}$ et $x^{3 \times 11 \times 17} \equiv x \pmod{17}$. On a $3 \times 11 \times 17 \equiv 1 \pmod{2}$; pour $x \not\equiv 0 \pmod{3}$, on a $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ donc $x^{3 \times 11 \times 17} \equiv x \pmod{3}$, et ceci est encore vrai pour $x \equiv 0 \pmod{3}$. De même, on a $3 \times 11 \times 17 \equiv 1 \pmod{10}$, $x^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ pour $x \not\equiv 0 \pmod{11}$, donc $x^{3 \times 11 \times 17} \equiv x \pmod{11}$ et $3 \times 11 \times 17 \equiv 1 \pmod{16}$, $x^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ pour $x \not\equiv 0 \pmod{17}$, donc $x^{3 \times 11 \times 17} \equiv x \pmod{17}$, ce qui conclut : les solutions sont les couples (11,17) et (17,11). *Remarque.* Les entiers n composés vérifiant $x^n \equiv x \pmod{n}$ pour tout n sont appelés les nombres de Carmichael. Celui de l'exercice $3 \times 11 \times 17 = 561$ est le plus petit et le plus connu, et comme on vient de le montrer c'est le seul de la forme $3pq$ avec p et q premiers. On sait aujourd'hui qu'il existe une infinité de nombres de Carmichael.

Solution de l'exercice 38. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(a_1 + \dots + a_n)(a_1^3 + \dots + a_n^3) \geq (a_1^2 + \dots + a_n^2)^2$$

avec égalité si et seulement si (a_1, \dots, a_n) et (a_1^3, \dots, a_n^3) sont proportionnels. Or, ici, $96 \times 216 = 144^2$: on est donc dans le cas d'égalité. Ceci montre que $a_1 = \dots = a_n = a$. Il s'ensuit $na = 96$ et $na^2 = 144$, d'où $a = 3/2$, et $n = 64$.

Solution de l'exercice 39. Pour simplifier nous dirons « boule numéro k » au lieu de « boule portant l'étiquette indiquant k kg. » Première pesée : posons sur un plateau les boules de 1 à 8 et sur l'autre les boules 11, 12 et 13. On a $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36 = 11+12+13$. Ainsi, si la balance indique l'égalité des poids, c'est qu'on a réellement les 8 boules les plus légères d'un côté et les trois boules les plus lourdes de l'autre. Nous avons donc divisé, de manière certaine, l'ensemble des boules en trois groupes :

$$\underbrace{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}_A, \underbrace{9, 10}_B, \underbrace{11, 12, 13}_C.$$

Deuxième pesée : posons sur un plateau les boules 1, 2, 3 et 9, et sur l'autre plateau les boules 7 et 8. On a $1+2+3+9 = 15 = 7+8$. Donc, si la balance indique l'égalité des poids, les boules 1, 2 et 3 sont en effet les plus légères du groupe A, la boule 9 la plus légère du groupe B et les boules 7 et 8 les plus lourdes du groupe A. Ainsi nous avons divisé, de manière certaine, l'ensemble des boules en six groupes :

$$\underbrace{1, 2, 3}_a, \underbrace{4, 5, 6}_b, \underbrace{7, 8}_c, \underbrace{9}_d, \underbrace{10}_e, \underbrace{11, 12, 13}_f.$$

Troisième pesée : posons sur un plateau les boules 1, 4, 7, 9 et 11 et sur l'autre plateau les boules 3, 6, 10 et 13. On a $1+4+7+9+11 = 32 = 3+6+10+13$. Nous avons de nouveau mis sur un plateau

¹³. On dit alors que x est d'ordre $q-1$. Le fait qu'un tel x existe n'est pas une évidence, mais c'est malgré tout un résultat à connaître.

les boules qui sont censées être les plus légères de leurs groupes, et sur l'autre les boules censées être les plus lourdes. Donc, si la balance indique l'égalité des poids, c'est que toutes les boules sont bien étiquetées.

Solution de l'exercice 40. Notons que la différence entre le numérateur et le dénominateur de chaque fraction est $n + 2$. Donc $n + 2$ doit être premier avec tous les entiers de 19 à 91. Comme cette liste contient tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 91, $n + 2$ doit avoir seulement des facteurs premiers strictement plus grands que 91. Le plus petit entier vérifiant cette condition est 97, soit $n = 95$.

Solution de l'exercice 41. On a

$$1998 < \lambda = \frac{1998 + \sqrt{1998^2 + 4}}{2} = 999 + \sqrt{999^2 + 1} < 1999$$

d'où $x_1 = 1998$. Puisque $\lambda^2 - 1998\lambda - 1 = 0$, on a $\lambda = 1998 + \frac{1}{\lambda}$ et $x\lambda = 1998x + \frac{x}{\lambda}$ pour tout réel x . De plus, λ est irrationnel et x_{n-1} est entier, donc λx_{n-1} n'est pas entier; ainsi, comme $x_n = \lfloor \lambda x_{n-1} \rfloor$, on a $x_n < \lambda x_{n-1} < x_n + 1$, ou encore

$$\frac{x_n}{\lambda} < x_{n-1} < \frac{x_n + 1}{\lambda}$$

que l'on réécrit

$$x_{n-1} - 1 < x_{n-1} - \frac{1}{\lambda} < \frac{x_n}{\lambda} < x_{n-1}$$

et on en déduit que $\lfloor x_n / \lambda \rfloor = x_{n-1} - 1$. Comme $1998x_n$ est entier, on a

$$x_{n+1} = \lfloor x_n \lambda \rfloor = \left\lfloor 1998x_n + \frac{x_n}{\lambda} \right\rfloor = 1998x_n + x_{n-1} - 1,$$

et en particulier $x_{n+1} \equiv x_{n-1} - 1 \pmod{1998}$. Par récurrence, $x_{1998} \equiv x_0 - 999 \equiv 1000 \pmod{1998}$.

Solution de l'exercice 42. Non. En effet, les règles classiques de multiplication montrent que le produit de deux nombres se terminant par 5 (resp. 6) se termine encore par 5 (resp. 6). Ainsi, une puissance de 5 se termine toujours par 5, et une puissance de 6 par 6. Elles ne peuvent donc pas partager les quatre mêmes derniers chiffres.

Solution de l'exercice 43. Notons A_n le nombre en question et montrons la propriété par récurrence sur n . On a $A_1 = 111$, qui est bien divisible par 3, mais pas par 9. Maintenant supposons que A_n est divisible par 3^n , mais pas par 3^{n+1} .

$$A_{n+1} = \underbrace{100\dots00}_{3^{n-1}} \underbrace{100\dots001}_{3^{n-1}} \cdot A_n.$$

Le nombre $100\dots00100\dots001$ a pour somme des chiffres 3. Il est donc divisible par 3, mais pas par 9. Par conséquent, A_{n+1} est divisible par 3^{n+1} , mais pas par 3^{n+2} .

Solution de l'exercice 44. Comme n se termine par 1, 3, 7 ou 9, il n'est pas divisible ni par 2, ni par 5. Comme les nombres premiers inférieurs à 11 sont simplement 2, 3, 5 et 7, il suffit pour conclure de montrer que n n'est pas de la forme $3^a 7^b$. Pour cela, on étudie cette quantité modulo 20. Les puissances de 3 modulo 20 valent cycliquement 1, 3, 9 et 7, tandis que les puissances de 7 valent 1, 7, 9 et 3. Il s'ensuit que $3^a 7^b$ est toujours congru modulo 20 à 1, 3, 7 ou 9. En particulier, son chiffre des dizaines est pair, et donc ne peut s'égaliser à n qui a par hypothèse un chiffre des dizaines impair.

Solution de l'exercice 45. Posons $x_{n+1} = x_1$ de sorte que le système s'écrive sous la forme $x_i^2 + x_{i+1}^2 + 50 = 16x_i + x_{i+1}$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Cette dernière équation est équivalente à l'égalité $(x_i - 8)^2 +$

$(x_{i+1} - 6)^2 = 50$ bien plus maniable pour cet exercice, puisqu'en examinant comment 50 peut s'écrire comme somme de deux carrés, elle implique que tous les couples (x_i, x_{i+1}) doivent être l'un des suivants :

$$(7, -1) ; (7, 13) ; (9, -1) ; (9, 13) ; (3, 1) ; (3, 11) \\ (13, 1) ; (13, 11) ; (1, 5) ; (1, 7) ; (15, 5) ; (15, 7).$$

Par ailleurs, un des précédents couples (x, y) ne peut effectivement apparaître que si x (resp. y) est la deuxième (resp. la première) d'un autre couple. Ceci élimine les couples $(7, -1)$, $(9, -1)$, $(9, 13)$, $(3, 1)$, $(3, 11)$, $(13, 11)$, $(1, 5)$, $(15, 5)$ et $(15, 7)$ ne laissant donc comme candidats que $(7, 13)$, $(13, 1)$ et $(1, 7)$. Ainsi si solution il y a les x_i doivent former une suite périodique $\dots, 7, 13, 1, 7, 13, 1, \dots$ et ceci n'est évidemment possible que si n est multiple de 3. Réciproquement, si n est multiple de 3, cette suite périodique est bien solution.

Solution de l'exercice 46. Considérons C le point diamétralement opposé à A . Il est nécessairement distinct du point B car sinon le trajet serait au moins égal au diamètre de la pomme, soit 10cm. Le plan médiateur de $[BC]$, passant par définition par O le centre de la pomme, coupe cette dernière en deux parties égales. Nous affirmons que celle contenant C est saine. En effet, dans le cas contraire, par continuité du trajet, le ver serait passé par un point M situé sur le plan médiateur de $[BC]$, et en symétrisant le trajet du ver à partir de ce point, on obtient un trajet de même longueur reliant A à C . Ceci n'est pas possible car A et C sont séparés de 10cm et le trajet du ver est par hypothèse strictement plus court.

Solution de l'exercice 47. Non. Soit $P(x)$ l'ensemble des points dont la distance au parallélépipède P est inférieure ou égale à x . (On considère le parallélépipède comme une figure pleine, si bien que l'intérieur de P fait partie de $P(x)$ pour tout x .) Notons $p(x)$ le volume de $P(x)$. $P(x)$ est constitué de :

- ☞ le parallélépipède P lui-même ;
- ☞ six parallélépipèdes de hauteur x construits sur les faces de P ;
- ☞ douze quarts de cylindres de rayon x construits sur les arêtes de P ;
- ☞ huit huitièmes de sphère de rayon x construits autour des sommets de P .

Le volume $p(x)$ vaut donc

$$p(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 + l(P)x^2 + A(P)x + V(P),$$

où $l(P)$, $A(P)$ et $V(P)$ sont le périmètre de P , l'aire de P et le volume de P respectivement. Comme $P \subset Q$, on a $p(x) < q(x)$ pour tout x . Autrement dit,

$$q(x) - p(x) = [l(Q) - l(P)]x^2 + [A(Q) - A(P)]x + [V(Q) - V(P)] > 0.$$

En considérant cette inégalité pour x très grand, on déduit que $l(Q) \geq l(P)$.

Solution de l'exercice 48. Le membre de gauche est aussi égal à $1 - \sum_{i=1}^n x_i^2$, donc on peut réécrire l'inégalité cherchée sous la forme

$$\frac{1}{n-1} \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{1-a_i}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{1-a_i} \right) \left(\sum_{i=1}^n (1-a_i) \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = 1,$$

et l'égalité $\sum_{i=1}^n (1-a_i) = n-1$ nous donne le résultat annoncé. Le cas d'égalité a lieu si et seulement si $\left(\frac{x_1^2}{1-a_1}, \dots, \frac{x_n^2}{1-a_n} \right)$ et $(1-a_1, \dots, 1-a_n)$ sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si (x_1^2, \dots, x_n^2) et $((1-a_1)^2, \dots, (1-a_n)^2)$ sont proportionnels.

Solution de l'exercice 49. Montrons que le nombre maximal de tels réels est $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. On obtient cette borne en prenant par exemple $x_i = i + \frac{1}{2^i}$. Dans ce cas, les sommes de $\lfloor n/2 \rfloor$ des x_i sont deux à deux distinctes (d'après l'unicité de l'écriture en base 2) et toutes dans l'intervalle $[\lfloor n/2 \rfloor, \lfloor n/2 \rfloor + 1]$. Finalement, elles sont bien au nombre de $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. Montrons maintenant que cette valeur ne peut pas être dépassée. Tout d'abord, remarquons que si on a une permutation σ de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, alors au plus l'un des ensembles $J_i^\sigma = \{\sigma(1), \dots, \sigma(i)\}$ vérifie que $\sum_{j \in J_i^\sigma} x_j \in I$, puisque les x_j sont supérieurs à 1. La somme de l'énoncé revient à faire la somme des x_j sur un sous-ensemble J de $\{1, \dots, n\}$. Or, si un tel sous-ensemble J est de cardinal i , il existe $i!(n-i)!$ permutations σ telles que $J = J_i^\sigma$. Soit $f(J)$ l'ensemble de ces permutations, et soit T l'ensemble des $J \subset \{1, \dots, n\}$ tels que $\sum_{j \in J} x_j \in I$. D'après la remarque précédente, les ensembles $f(J)$ pour $J \in T$ sont deux à deux disjoints, et comme $\text{Card}(f(J)) = \text{Card}(J)!(n - \text{Card}(J))!$, on a

$$\sum_{J \in T} \text{Card}(J)!(n - \text{Card}(J))! \leq n!$$

puisque l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, n\}$ est de cardinal $n!$. Or, $t!(n-t)!$ est minimal pour $t = \lfloor n/2 \rfloor$, donc la somme de gauche est minorée par $\text{Card}(T) \times \lfloor n/2 \rfloor!(n - \lfloor n/2 \rfloor)!$. En divisant l'inégalité qui en découle par $n!$, on obtient

$$\text{Card}(T) \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor},$$

qui est bien l'inégalité désirée.

Solution de l'exercice 50. Calculons la valeur des mots utilisés pour écrire les nombres :

Un : 35	Deux : 54	Trois : 81
Quatre : 82	Cinq : 43	Six : 52
Sept : 60	Huit : 58	Neuf : 46
Dix : 37	Onze : 60	Douze : 71
Treize : 83	Quatorze : 123	Quinze : 92
Seize : 64	Vingt : 72	Trente : 82
Quarante : 97	Cinquante : 104	Soixante : 107
Cent : 42	Et : 25	

Parmi les nombres précédents, ceux inférieurs à 100 sont largement dépassés par la somme des valeurs de leurs lettres. On en déduit que le nombre cherché est supérieur à 100. On vérifie que les nombres entre 101 et 120 ne conviennent pas. Comme la plus petite valeur associée à un chiffre des unités est 43 (qui est associée à 5), et qu'un test assure que les nombres 125, 135, 145, 155 et 165 sont encore largement dépassés par la somme des valeurs de leurs lettres, on en déduit que le nombre cherché est supérieur à 200. La valeur littérale de 200 est 96. Comme la somme des nombres compris entre 1 et 20, hormis 14, n'excède pas 100, aucun des nombres compris entre 200 et 220, hormis 214 n'est susceptible de convenir. On vérifie que 214 ne convient pas non plus, pas plus que 221. Le meilleur candidat est désormais 222 qui répond, lui, à la question.

Solution de l'exercice 51. Il est facile de voir que $P(x, y) = x^2 + (xy + 1)^2$ convient.

Solution de l'exercice 52. Si n désigne le plus petit de ces entiers, la somme vaut :

$$n + (n + 1) + (n + 2) + \dots + (n + 19) = 20n + 190.$$

On est donc ramené à résoudre l'équation $20n + 190 = 1030$, qui donne $n = 42$.

Solution de l'exercice 53. Remarquons que

$$(2x - 3)(2x - 17) = 4x^2 - 40x + 51 \leq 4x^2 - 40[x] + 51 = 0$$

ce qui donne $1,5 \leq x \leq 8,5$ et $1 \leq [x] \leq 8$. D'après l'équation,

$$x = \frac{\sqrt{40[x] - 51}}{2}$$

et donc il est nécessaire que

$$[x] = \left\lfloor \frac{\sqrt{40[x] - 51}}{2} \right\rfloor.$$

En testant $[x] = 1, 2, \dots, 8$ dans cette équation, on trouve que $[x]$ ne peut être égal qu'à 2, 6, 7 ou 8. On en déduit que les seules solutions possibles pour x sont $\sqrt{29}/2$, $\sqrt{189}/2$, $\sqrt{229}/2$ et $\sqrt{269}/2$. Une vérification rapide confirme que ces valeurs marchent.

Solution de l'exercice 54. Soit R le rayon de la sphère. Par le théorème de Pythagore, le rayon du cylindre est $\sqrt{R^2 - 9}$. Le volume restant est égal au volume de la sphère, c'est-à-dire $\frac{4}{3}\pi R^3$, auquel on a enlevé le volume du cylindre, c'est-à-dire $\pi(R^2 - 9) \times 6$, et le volume des deux calottes sphériques, c'est-à-dire $2 \times \pi(R - 3)^2(R - \frac{R-3}{3}) = \frac{2}{3}\pi(R - 3)^2(2R + 3)$. Le calcul donne

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi(R^2 - 9) \times 6 - \frac{2}{3}\pi(R - 3)^2(2R + 3) = 36\pi \text{ cm}^3$$

et on constate en particulier que le résultat ne dépend pas de R !

Solution de l'exercice 55. La remarque suivante va nous faciliter la tâche : le point de coordonnées (x, y) est visible si, et seulement si x et y sont premiers entre eux. Effectuons à présent le décompte des points visibles en comptant séparément ceux (strictement) au-dessous de la diagonale $x = y$, ceux au-dessus et ceux sur la diagonale. Bien entendu, par symétrie, il y a autant de points visibles au-dessous qu'au dessus. Par ailleurs sur la diagonale, il y a un unique point visible qui est $(1, 1)$. À abscisse x fixée, il y a, par la première remarque de cette solution, autant de points visibles sous la diagonale que d'entiers dans $\{0, 1, \dots, x - 1\}$ qui sont premiers avec x . Par définition, c'est $\varphi(x)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler. Au final, le nombre cherché est donc :

$$1 + 2[\varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(4) + \dots + \varphi(25)] = 399.$$

(Pour calculer rapidement les premières valeurs de φ , on peut utiliser les formules $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ lorsque p est un nombre premier et $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ lorsque a et b sont premiers entre eux.)

Solution de l'exercice 56. Considérons une pyramide à base carrée de côté 1 et de hauteur $\frac{1}{10}$, immergée pointe en bas à 99% de la hauteur. Le volume en immersion vaut $(\frac{99}{100})^3$ du volume total, ce qui dépasse bien 90%. La surface immergée vaut $2(\frac{99}{100})^2 \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{4}}$ alors que la surface totale est de $2\sqrt{\frac{1}{100} + \frac{1}{4}} + 1$, et on vérifie que le rapport des deux est bien inférieur à 50%.

Solution de l'exercice 57. Si a est un diviseur de N , alors N/a en est un aussi. Ainsi les diviseurs se répartissent en paires. La seule exception, c'est quand $a = N/a$, autrement dit, $N = a^2$. Dans ce cas, a est le seul diviseur à ne pas avoir de paire. Donc N a un nombre impair de diviseurs positifs si et seulement si N est un carré parfait. Les nombres répondant à la question sont donc 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 et 100.

Solution de l'exercice 58. Pour que n^2 soit un cube, n doit être lui-même un cube. Comme $n < 1000$, on doit avoir $n = 1^3, 2^3, \dots$, ou 9^3 . Pour $n \geq 6^3 = 216$, on a $n^2 \geq 6^6 > 27^3$. Or, la somme des chiffres de n est au plus $9 + 9 + 9 = 27$. Pour $n \in \{1, 8, 27, 64, 125\}$, on vérifie à la main que 1 et 27 ont la propriété demandée et que ce n'est pas le cas des autres. Les solutions sont donc $n = 1$ et $n = 27$.

Solution de l'exercice 59. La somme que l'on considère peut être réécrite $2n(2n-2) - \sum_{k=1}^{n-1} k^2 x_k$. On a

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 x_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k + (k-1)(k+1)x_k \leq n + n \sum_{k=1}^{n-1} (k-1)x_k = n + n(2n-2-n) = n^2 - n.$$

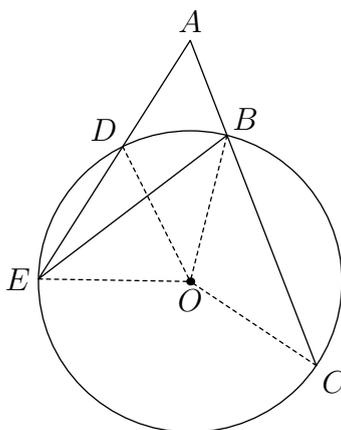
La quantité cherchée est donc au moins $2n(2n-2) - (n^2 - n) = 3n^2 - 3n$, et cette borne est atteinte pour $x_1 = n-1$, $x_2 = \dots = x_{n-2} = 0$, $x_{n-1} = 1$.

Solution de l'exercice 60. Si n est pair, on peut écrire $n = 2n - n$. Sinon, appelons d le plus petit nombre premier impair qui ne divise pas n . Puisque n s'écrit manifestement sous la forme $n = dn - (d-1)n$, il suffit de montrer que dn et $(d-1)n$ ont le même nombre de diviseurs premiers. Les facteurs premiers de dn sont ceux de n auxquels il faut ajouter d (puisque par hypothèse d ne divise pas n). D'autre part, tous les facteurs premiers de $d-1$ sont certainement plus petits que $d-1$ et donc apparaissent dans n , à l'exception de 2. Ainsi dn et $(d-1)n$ ont tous les deux un facteur premier de plus que n (c'est d pour dn et 2 pour $(d-1)n$), ce qui conclut la démonstration.

Solution de l'exercice 61. Les polynômes constants sont évidemment solutions. Remarquons que $P(x, y) = P(x+y, y-x) = P(2y, -2x)$ pour tous x et y . En répétant ce procédé, on obtient $P(x, y) = P(16x, 16y)$. En écrivant $P(x, y) = \sum_{i,j \geq 0} a_{ij} x^i y^j$, l'égalité précédente implique, par unicité de l'écriture, que $16^{i+j} a_{ij} = a_{ij}$, et il s'ensuit que $a_{ij} = 0$ pour $i+j > 0$. Donc P doit être constant.

Solution de l'exercice 62. Soient pour l'instant M un point quelconque du plan et R le rayon du cercle circonscrit au triangle AMB . La formule $AB = 2R \sin \widehat{AMB}$ montre que l'angle \widehat{AMB} est maximal lorsque R est minimal (puisque AB reste constant). Ainsi, il s'agit de trouver le cercle de plus petit rayon passant par A et B et coupant la droite (d) et il est évidemment obtenu lorsqu'il est tangent à cette droite. Le point M cherché est le point de tangence.

Solution de l'exercice 63. La figure est la suivante :

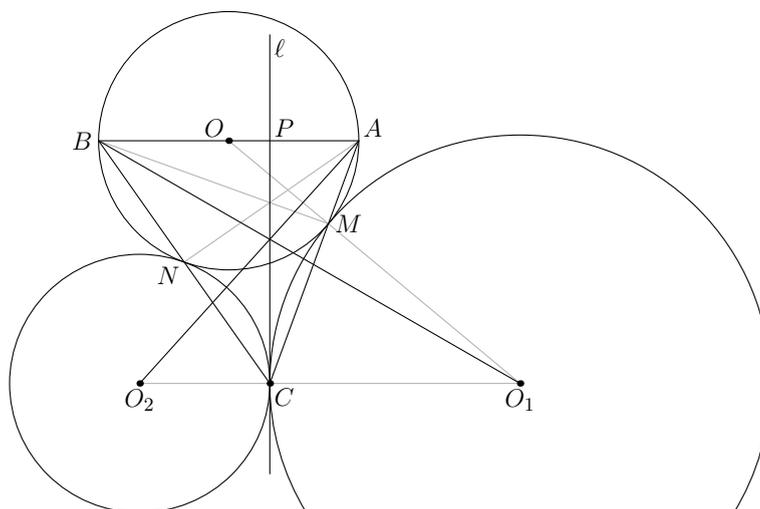


D'après le théorème de l'angle inscrit, d'une part, $\widehat{COE}/2 = \widehat{CBE}$ et d'autre part, $\widehat{BOD}/2 = \widehat{BED} = \widehat{BEA}$. On a donc

$$\frac{\widehat{COE} - \widehat{BOD}}{2} = \widehat{CBE} - \widehat{BEA} = \pi - \widehat{ABE} - \widehat{BEA} = \widehat{CAE}$$

qui est bien ce que l'on voulait.

Solution de l'exercice 64. Soient M et N les intersections respectives de (AC) et (BC) avec k .



On note r , r_1 et r_2 les rayons respectifs de k , k_1 et k_2 . Le triangle AMO étant isocèle, on a

$$\widehat{AMO} = \widehat{OAM} = \widehat{O_1CM} = \widehat{CMO_1}.$$

Par conséquent, O , M , O_1 sont alignés et $AM/MC = OM/MO_1 = r/r_1$. De même, O , N , O_2 sont alignés et $BN/NC = ON/NO_2 = r/r_2$. Soit P le point d'intersection de ℓ et (AB) . Les droites (AN) , (BM) , (CP) se coupent en l'orthocentre du triangle ABC , donc d'après le théorème de Ceva, $AP/PB = (AM/MC)(CN/NB) = r_2/r_1$. Soient maintenant D_1 et D_2 les intersections respectives de ℓ avec (BO_1) et (AO_2) . Alors $CD_1/D_1P = O_1C/PB = r_1/PB$, et de même, $CD_2/D_2P = r_2/PA$. On en déduit $CD_1/D_1P = CD_2/D_2P$ et $D_1 = D_2$. Donc (AO_2) , (BO_1) et ℓ sont concourantes.

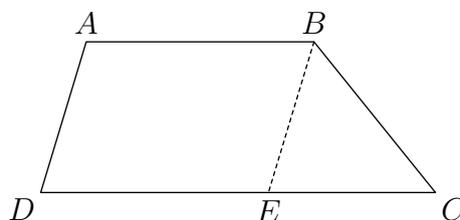
Solution de l'exercice 65. La clé consiste à étudier la suite (a_n) modulo 4. Un calcul immédiat montre que pour toute valeur de a_n , a_{n+2} est congru à 2 ou à 3 modulo 4 ; en particulier il n'est jamais un carré. Ainsi les deux seuls carrés qui peuvent apparaître parmi les a_n sont les deux premiers, a_0 et a_1 . Supposons un instant que ces deux nombres soient des carrés. Cela signifie que $a_0^6 + 1999$ est un carré, c'est-à-dire que l'équation diophantienne $x^6 + 1999 = y^2$ a une solution. Or cette dernière égalité se réécrit $(y - x^3)(y + x^3) = 1999$ et comme 1999 est premier l'un des deux facteurs vaut 1 et l'autre 1999. En effectuant la différence, il reste $2|x|^3 = 1998$, ce qui n'est pas possible étant donné que 999 n'est pas un cube. Ainsi, l'équation diophantienne n'a pas de solutions, et les deux premiers termes de la suite ne peuvent être simultanément des carrés.

Solution de l'exercice 66. La réponse est non. Pour le prouver, nous allons montrer que quelles que soient les questions de Дмитрий (de la forme de l'énoncé), Олег peut fournir des réponses de telle façon qu'une fois le stock de questions épuisé, il reste au moins deux ordres compatibles avec les réponses données. En effet, si Дмитрий n'a pas de chance, cela reviendrait exactement à dire qu'Oлег peut modifier au fur et à mesure les pierres pour faire échouer Дмитрий, de manière à ce que ça reste compatible avec les réponses qu'il a déjà données. La stratégie d'Oлег est en fait très simple : pour chaque question de Дмитрий, il regarde quelle réponse (oui ou non) écarte le moins d'ordres compatibles et donne cette réponse-ci. Nous allons montrer précisément qu'avec cette stratégie, si après la $(i - 1)$ -ième réponse, il reste x ordres compatibles, alors après la i -ième, il en reste au moins $\max(\frac{x}{2}, x - 20)$. La minoration en $\frac{x}{2}$ est évidente. Pour $x - 20$ maintenant, il suffit de constater que si Олег répond non, alors il élimine au plus 20 ordres, puisqu'étant donné A , B et C , il y a en tout exactement 20 ordres (un sixième de $5! = 120$) pour lesquels A est plus léger que B , lui-même plus léger que C . On conclut alors facilement : au début, il y a 120 ordres possibles. Par ce qui précède, après la première question, Олег peut s'arranger pour qu'il en est au moins 100. Après la question suivante, au moins 80, puis au moins 60, puis au moins 40, puis au moins 20, puis au moins 10, puis au moins 5, puis au moins 3, puis finalement au moins 2 comme voulu.

Solution de l'exercice 67. Pierre ne peut pas être le même soldat que Paul, vu qu'ils n'ont pas le même prénom. Mais sinon une telle chose serait tout à fait possible, par exemple si le soldat de coordonnées (i, j) avait la taille $i + j$. Considérons le soldat qui se trouve dans le rang de Pierre et dans la colonne de Paul. Il est plus grand que Pierre, vu que Pierre est le plus petit de son rang; mais il est plus petit que Paul, vu que Paul est le plus grand de sa colonne. Donc Paul est plus grand que Pierre.

Solution de l'exercice 68. Montrons tout d'abord que pour tout entier n , il existe une écriture $n = rs$ telle que $f(n) = r + s$ et $f(2n) = 2r + s$. Exploitions pour cela l'équation fonctionnelle avec $m = 1$. Elle fournit une équation du second degré en $f(2n)$ dont le discriminant est $\Delta = f(n)^2 - 4n$. Celui-ci doit être entier, i.e. il existe un entier a tel que $f(n)^2 - 4n = a^2$. On a alors $(f(n) + a)(f(n) - a) = 4n$. Les deux facteurs doivent être pairs, car leur produit est $4n$ et leur somme $2f(n)$. On pose donc $f(n) + a = 2r$ et $f(n) - a = 2s$ pour des entiers r et s . On a alors $f(n) = r + s$ et $rs = n$. Finalement, la résolution de l'équation du second degré donne les deux solutions $f(2n) = 2r + s$ ou $f(2n) = 2s + r$, et quitte à échanger les rôles de r et s , on peut ne conserver que la première. Appliquons maintenant sans modération le résultat précédent. Déjà, pour $n = 1$, on a nécessairement $r = s = 1$, et donc $f(1) = 2$, $f(2) = 3$. Également, si $n = p$ est un nombre premier, on doit avoir $r = 1, s = p$ ou $r = p, s = 1$. Dans tous les cas $f(p) = r + s = p + 1$. Soit maintenant n un nombre impair. D'après le postulat de Bertrand, il existe un nombre premier p compris entre $\frac{n}{2}$ et n , et d'après le cas que l'on vient de traiter, $f(p) = p + 1$. La croissance de f entraîne donc $f(n) \geq f(p) = p + 1 \geq \frac{n}{2} + 1$. Considérons une écriture $n = rs$ pour laquelle $f(n) = r + s$. Si aucun des diviseurs r et s ne vaut 1, ils sont tous les deux supérieurs ou égaux à 3 (puisque n est supposé impair), d'où il résulte $f(n) = r + s \leq \frac{n}{3} + 3$, ce qui est en contradiction avec l'autre estimation dès que $n > 12$. Ainsi pour tout nombre impair $n > 12$, on a aussi $f(n) = n + 1$. Le seul nombre impair qui échappe aux méthodes génériques précédentes est $n = 9$ qui, en l'occurrence se traite facilement à la main : les deux décompositions $n = rs$ possibles sont $9 = 9 \times 1$ et $9 = 3 \times 3$, mais dans le second cas, on aurait $f(9) = 6$, ce qui contredit la croissance de f étant donné $f(7) = 8$; ainsi $f(9) = 10$. Il ne reste plus qu'à traiter le cas des nombres pairs. Pour cela, nous montrons que si $f(n) = n + 1$, alors $f(2n) = 2n + 1$, la conclusion « $f(n) = n + 1$ pour tout entier n » en résultera par une récurrence immédiate sur la valuation 2-adique de n . Supposons donc $f(n) = n + 1$ pour un entier n fixé. D'après le premier alinéa, on sait qu'il existe une écriture $n = rs$ pour laquelle $f(n) = r + s$ et $f(2n) = 2r + s$. Les seules possibilités pour concilier $rs = n$ et $r + s = n + 1$ sont $r = n, s = 1$ d'une part et $r = 1, s = n$ d'autre part. Dans le premier cas, $f(2n) = 2n + 1$ comme souhaité. Supposons donc que l'on soit dans le second cas. Alors $f(2n) = n + 2$ et comme le nombre $2n - 1$ est manifestement impair, on a aussi $f(2n - 1) = 2n$. Ainsi, par croissance, $n + 2 \geq 2n$, i.e. $n \leq 2$. Si $n = 1$, on constate que $n + 2 = 2n + 1$ et donc on a également ce que l'on voulait. Pour $n = 2$, cela donnerait $f(4) = 4$, et donc la décomposition $n = rs$ pour $n = 4$ serait $4 = 2 \times 2$. On en déduirait $f(8) = 6$, ce qui contredit une fois de plus la croissance de f car $f(7) = 8$. En résumé, la seule solution possible de l'équation fonctionnelle est $f(n) = n + 1$ et on n'oublie pas de vérifier pour finir que cette fonction convient bien.

Solution de l'exercice 69. Dans le trapèze $ABCD$, traçons la droite passant par B et parallèle à (AD) . Soit E son point d'intersection avec la droite (CD) . Par l'inégalité triangulaire dans le triangle BCE , on a $CE \geq |BE - BC|$, soit $|AB - CD| \geq |AD - BC|$. L'égalité est atteinte si et seulement si le triangle BCE est dégénéré, c'est-à-dire si $ABCD$ est un parallélogramme.



Or, en utilisant le trapèze $A'B'C'D'$, on montre de la même manière que $|AB - CD| \leq |AD - BC|$, et que l'égalité est atteinte si et seulement si $A'B'C'D'$ est un parallélogramme. Donc, en fait, on a $|AB - CD| = |AD - BC|$ et les deux trapèzes sont des parallélogrammes.

Solution de l'exercice 70. Du fait que $2y^2 + 1 > 0$ et de la stricte croissance de la fonction cube, on déduit que l'équation implique $x > y$. D'autre part, on peut écrire l'équation sous la forme :

$$x^3 = (y+1)^3 - y^2 - 3y.$$

Ainsi si $y^2 + 3y > 0$, on déduit par le même argument que précédemment que $x < y + 1$, ce qui est impossible à concilier avec $x > y$ sachant que x et y sont tous les deux des nombres entiers. On en vient donc à se demander quand la quantité $y^2 + 3y = y(y+3)$ est négative ou nulle. Un tableau de signe immédiat montre que c'est pour y compris entre -3 et 0 . Comme y est un entier, il ne reste que les valeurs $-3, -2, -1$ et 0 que l'on teste une par une en les remplaçant dans l'équation. On obtient comme ceci la liste des solutions qui est formée des couples $(1, 0), (1, -2)$ et $(-2, -3)$.

Solution de l'exercice 71. Oui. Prenez trois points sur l'équateur distants de moins de 1 millimètre. Ils forment un triangle dont l'équateur est le cercle circonscrit.

Solution de l'exercice 72. Posons $y = \sqrt{x+1}$. On a $y \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, et $x = y^2 - 1$. L'inégalité est équivalente à

$$\frac{(y^2 - 1)^2}{(y^2 - y)^2} < \frac{(y^2 - 1)^2 + 3(y^2 - 1) + 18}{y^4}$$

encore équivalente aux inégalités suivantes

$$\frac{(y+1)^2}{y^2} < \frac{y^4 + y^2 + 16}{y^4} \Leftrightarrow (y+1)^2 y^2 < y^4 + y^2 + 16 \Leftrightarrow 2y^3 < 16 \Leftrightarrow y < 2.$$

La condition est donc satisfaite exactement pour $y \in]0, 1[\cup]1, 2[$ et $x \in]-1, 0[\cup]0, 3[$.

Solution de l'exercice 73. Introduisons l'ensemble des « états » possibles du minotaure (cellule, couloir, intention), où la cellule est celle dans laquelle il se trouve, le couloir est celui par lequel il vient d'arriver, et l'intention est de tourner à droite ou à gauche. L'état du minotaure détermine entièrement la suite de son parcours. Le nombre d'états possibles est fini, donc le minotaure va un jour se retrouver dans un état où il a déjà été, et à partir de là son parcours va boucler. Il s'agit de prouver que cette boucle contient nécessairement sa cellule de départ. Pour cela, notons que sachant l'état présent du minotaure on peut retrouver de manière unique son état précédent. Supposons alors que x soit le premier état dans laquelle le minotaure s'est retrouvé deux fois. L'état qui doit précéder x est déterminé de manière unique, et pourtant le minotaure n'est passé par cet état qu'une seule fois. Cela implique que x est en fait son état de départ, qui fait donc partie de la boucle.

Solution de l'exercice 74. Montrons qu'il n'existe pas de telle fonction. Supposons par l'absurde que f vérifie la condition de l'énoncé. Avec $x = y = \pi/2$, on a $|f(\pi) + 2| < 2$, et avec $x = -\pi/2$ et $y = 3\pi/2$, on obtient $|f(\pi) - 2| < 2$. Or,

$$4 = |f(\pi) + 2 - f(\pi) + 2| \leq |f(\pi) + 2| + |-f(\pi) + 2| < 2 + 2,$$

ce qui constitue une contradiction manifeste.

Solution de l'exercice 75. Parmi les nombres d'un seul chiffre (*i.e.* ceux de 1 à 9), il n'y a aucun zéro. Parmi les nombres de deux chiffres, il y a neuf zéros : un au bout de 10, un au bout de 20 et ainsi de suite jusqu'à 90. Voyons maintenant ce qui se passe pour les nombres de trois chiffres. Un zéro ne peut évidemment apparaître qu'en deuxième ou troisième position. Il y a un zéro en deuxième position dans tous les nombres de la forme $x0y$ où x est un chiffre entre 1 et 9, et y un chiffre entre 0 et 9. Cela en fait donc 90. On raisonne de même pour les troisièmes zéros et on en trouve également 90. Le même raisonnement permet de dénombrer les zéros qui apparaissent dans les nombres de 1000 à 1999 : ceux qui apparaissent en deuxième (resp. troisième, resp. quatrième) position sont au

nombre de $1 \times 10 \times 10 = 100$. Cela en fait donc en tout 300. Reste les zéros qui apparaissent dans les nombres compris entre 2000 et 2007 que l'on peut compter à la main; on en trouve 17. Au final, le nombre cherché est $9 + 90 + 90 + 300 + 17 = 506$.

Solution de l'exercice 76. Considérons les paires de termes consécutifs de la suite de Fibonacci (F_0, F_1) , (F_1, F_2) , ... pris modulo 2007. Comme il n'y a que 2007^2 paires différentes d'entiers modulo 2007 et que la suite de Fibonacci est infinie, il existe deux paires congrues entre elles : $F_i \equiv F_{i+m} \pmod{2007}$ et $F_{i+1} \equiv F_{i+1+m} \pmod{2007}$ pour certains i et m . Si $i \geq 1$, $F_{i-1} \equiv F_{i+1} - F_i \equiv F_{i+m+1} - F_{i+m} \equiv F_{i+m-1} \pmod{2007}$. Par suite $F_{i-2} \equiv F_{i-1} - F_i \equiv F_{i+m-1} - F_{i+m} \equiv F_{i+m-2} \pmod{2007}$. En continuant ainsi, $F_j \equiv F_{j+m} \pmod{2007}$ pour tout $j \leq 0$. En particulier, $0 = F_0 \equiv F_m \pmod{2007}$, et donc F_m est divisible par 2007.

Solution de l'exercice 77. Introduisons un repère orthonormé tel que $A = (0, 0, 0)$ et $B = (1, 1, 1)$, les côtés du cube étant parallèles aux axes. Soit r le rayon de la sphère. Son centre est le point de coordonnées (r, r, r) , et le point de tangence avec l'une des arêtes en B est $(r, 1, 1)$. La distance entre ces deux points étant $\sqrt{2}(1-r)$, on en déduit $r = \sqrt{2}(1-r)$ et $r = 2 - \sqrt{2}$.

Solution de l'exercice 78. Comme f est strictement convexe, pour tous x, y, t tels que $x < t < y$, le point $(t, f(t))$ est strictement au dessous de la droite joignant $(x, f(x))$ et $(y, f(y))$. Supposons que quatre points $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, $C = (c, f(c))$ et $D = (d, f(d))$ avec $a < b < c < d$ forment un parallélogramme. Remarquons qu'alors (AC) et (BD) se coupent : en effet, B est au dessous de (AC) et C est au dessous de (BD) . Ces sont donc nécessairement les diagonales du parallélogramme. Mais alors elles se coupent en leur milieu. Or $\frac{a+c}{2} < \frac{b+d}{2}$, ce qui constitue une contradiction.

Solution de l'exercice 79. Tout d'abord, on a

$$\sum_{k=2}^n a_k = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_n} \right) = \sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \left[\frac{n}{p} \right]$$

où la dernière somme est prise sur les p premiers et où $[\cdot]$ désigne la partie entière. De plus,

$$\sum_{p \leq n} \frac{1}{p} \left[\frac{n}{p} \right] \leq \sum_{p \leq n} \frac{n}{p^2} < n \left(\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{(2k+1)^2} \right) < \frac{n}{4} \left(\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{k(k+1)} \right) = \frac{n}{4} \left(\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) < \frac{n}{2},$$

par conséquent $\sum_{k=2}^n a_k < \frac{n}{2}$ pour tout $n \geq 2$. Maintenant, d'après l'inégalité arithmético-géométrique,

$$a_2 a_3 \dots a_n < \left(\frac{a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n-1} \right)^{n-1} < \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1}$$

puis en développant à l'aide de la formule du binôme, on trouve

$$\left(1 + \frac{1}{n-1} \right)^{n-1} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leq 3$$

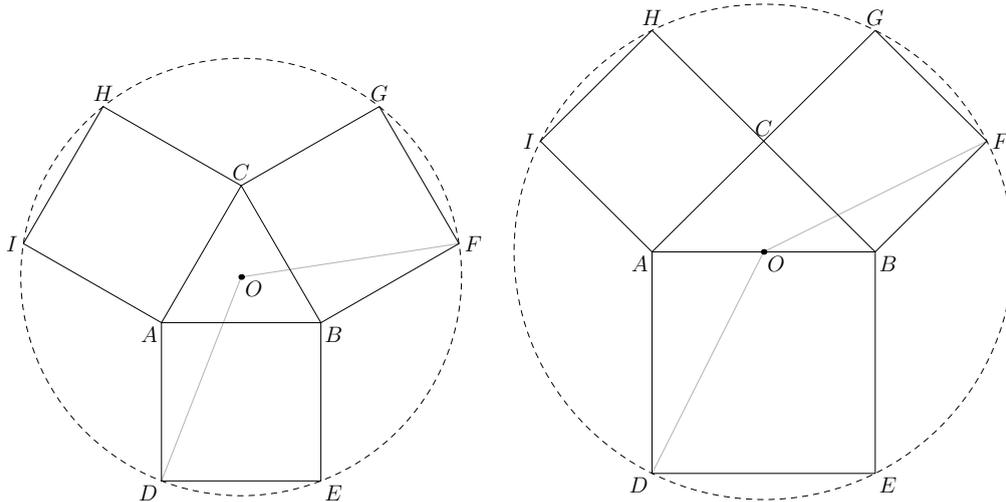
d'où $a_2 a_3 \dots a_n < \frac{3}{2^{n-1}}$. En ajoutant ces inégalités, on a

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_2 \dots a_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60} + 3 \left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \dots \right) = \frac{46}{60} + \frac{3}{2^5} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots \right) = \frac{46}{60} + \frac{6}{32} < 1.$$

Solution de l'exercice 80. En appliquant plusieurs fois la définition, il vient que $\frac{1543}{275}$ a la couleur inverse de $\frac{1543}{275} - 5 = \frac{168}{275}$, qui à son tour a la même couleur que $\frac{275}{168}$. On poursuit le raisonnement de la même façon : $\frac{275}{168}$ a la couleur opposée de celle de $\frac{275}{168} - 1 = \frac{107}{168}$, qui a la même couleur que $\frac{168}{107}$,

qui a la couleur opposée de $\frac{168}{107} - 1 = \frac{61}{107}$, qui a la même couleur que $\frac{107}{61}$, qui a la couleur opposée de $\frac{107}{61} - 1 = \frac{46}{61}$, qui a la même couleur que $\frac{61}{46}$, qui a la couleur opposée de $\frac{61}{46} - 1 = \frac{15}{46}$ qui a la même couleur que $\frac{46}{15}$, qui a la couleur opposée de $\frac{46}{15} - 3 = \frac{1}{15}$ qui a la même couleur que 15, lui-même de la même couleur que 1, c'est-à-dire blanc. En remontant, la couleur de $\frac{1543}{275}$ est aussi blanche.

Solution de l'exercice 81. Supposons que D, E, F, G, H et I sont cocycliques.



Les médiatrices de $[DE]$, $[FG]$, $[HI]$ étant celles de $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ respectivement, le centre du cercle doit être le centre O du cercle circonscrit à ABC . Notons M le milieu de $[AB]$ et R le rayon du cercle circonscrit à ABC . On calcule

$$OD^2 = (OM + AB)^2 + \frac{AB^2}{4} = \left(\sqrt{OA^2 - \frac{AB^2}{4}} + AB \right)^2 + \frac{AB^2}{4} = R^2 + AB\sqrt{4R^2 - AB^2} + AB^2$$

et de même

$$OF^2 = R^2 + BC\sqrt{4R^2 - BC^2} + BC^2.$$

D'après la loi des sinus, on a

$$\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = \frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = 2R$$

et de l'égalité $OD = OF$, on déduit

$$4R^2 \sin \widehat{C} \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{C}} + 4R^2 \sin^2 \widehat{C} = 4R^2 \sin \widehat{A} \sqrt{1 - \sin^2 \widehat{A}} + 4R^2 \sin^2 \widehat{A}$$

puis

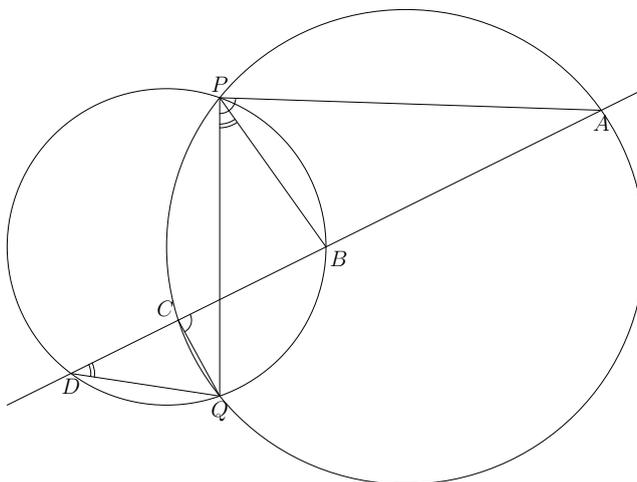
$$\cos \widehat{C} \sin \widehat{C} + \sin^2 \widehat{C} = \cos \widehat{A} \sin \widehat{A} + \sin^2 \widehat{A}.$$

Remarquons que l'on a

$$2(\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta) = 1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta = 1 + \sqrt{2} \sin(2\theta - \pi/4)$$

et l'étude de la fonction $\theta \mapsto \sin(2\theta - \pi/4)$ montre que $\widehat{A} = \widehat{C}$ ou $2\widehat{A} - \pi/4 + 2\widehat{C} - \pi/4 = \pi$ c'est-à-dire $\widehat{B} = \pi/4$. De même on a $\widehat{A} = \widehat{B}$ ou $\widehat{C} = \pi/4$, et $\widehat{B} = \widehat{C}$ ou $\widehat{A} = \pi/4$. Ceci montre que l'on a soit $A = B = C$, soit deux des angles égaux à $\pi/4$, c'est-à-dire que ABC est soit équilatéral, soit rectangle isocèle. Inversement, il est évident que si ABC est équilatéral, les points sont cocycliques; si ABC est rectangle isocèle en C , on vérifie facilement que $OD = OF$, puis la cocyclicité s'ensuit aisément.

Solution de l'exercice 82. On commence par faire une jolie figure.



Par le théorème de l'angle inscrit, on a $\widehat{APQ} = \widehat{ACQ}$ et $\widehat{BPQ} = \widehat{BDQ}$. D'où $\widehat{APB} = \widehat{APQ} - \widehat{BPQ} = \widehat{ACQ} - \widehat{BDQ} = \pi - \widehat{DCQ} - \widehat{CDQ} = \widehat{DQC}$.

Solution de l'exercice 83. Après mise en place des parenthèses, la valeur de la fraction est :

$$A = \left(\frac{29}{15}\right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{28}{14}\right)^{\varepsilon_2} \left(\frac{27}{13}\right)^{\varepsilon_3} \left(\frac{26}{12}\right)^{\varepsilon_4} \cdots \left(\frac{18}{4}\right)^{\varepsilon_{12}} \left(\frac{17}{3}\right)^{\varepsilon_{13}} \left(\frac{16}{2}\right)^{\varepsilon_{14}}$$

où les ε_i valent soit 1, soit -1 et, nécessairement $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = -1$. De plus, comme par hypothèse le résultat est entier, les nombres premiers qui n'interviennent qu'une fois, à savoir 29, 23, 19 et 17 doivent se trouver au numérateur. Ceci fournit $\varepsilon_7 = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{13} = 1$. Après simplification des fractions, on obtient :

$$A = \frac{29 \cdot 23 \cdot 19 \cdot 17}{2 \cdot 3^4 \cdot 5^2} \cdot \left(\frac{3^3}{13}\right)^{\varepsilon_3} \left(\frac{13}{2 \cdot 3}\right)^{\varepsilon_4} \left(\frac{5^2}{11}\right)^{\varepsilon_5} \left(\frac{2^2 \cdot 3}{5}\right)^{\varepsilon_6} \left(\frac{11}{2^2}\right)^{\varepsilon_8} 3^{\varepsilon_9} \left(\frac{2 \cdot 5}{3}\right)^{\varepsilon_{10}} \left(\frac{3^2}{2}\right)^{\varepsilon_{12}} (2^3)^{\varepsilon_{14}}.$$

Il est impossible que ε_3 soit égal à -1 , car sinon, il n'y aurait pas assez de 3 pour compenser un tel dénominateur. Ainsi $\varepsilon_3 = 1$, et pour éliminer le 13 qui apparaît alors au dénominateur, on est obligé d'avoir $\varepsilon_4 = 1$. En comptant les puissances de 5 maintenant, on obtient $\varepsilon_5 = 1$, puis en regardant le facteur 11, il suit $\varepsilon_8 = 1$. On en est à :

$$A = \frac{29 \cdot 23 \cdot 19 \cdot 17}{2^4 \cdot 3^2} \cdot \left(\frac{2^2 \cdot 3}{5}\right)^{\varepsilon_6} 3^{\varepsilon_9} \left(\frac{2 \cdot 5}{3}\right)^{\varepsilon_{10}} \left(\frac{3^2}{2}\right)^{\varepsilon_{12}} (2^3)^{\varepsilon_{14}}.$$

En regardant à nouveau l'exposant de 3, il suit $\varepsilon_{12} = 1$, puis en regardant l'exposant de 2, il vient $\varepsilon_6 = \varepsilon_{14} = 1$. Le nombre premier 5 donne alors ε_{10} , puis finalement en regardant une dernière fois l'exposant de 3, on obtient $\varepsilon_9 = \varepsilon_{12} = 1$. Au final :

$$A = 2 \times 3 \times 17 \times 19 \times 23 \times 29 = 1\,292\,646.$$

Solution de l'exercice 84. Tout d'abord, en posant $x = y$ dans la deuxième équation, on obtient $f(x^2) = (k+2)f(x)$. En appliquant deux fois cette égalité, on a

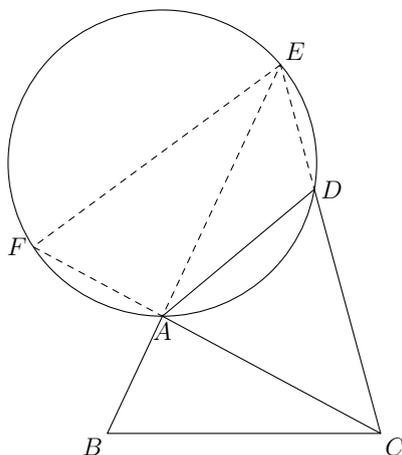
$$f(x^4) = (k+2)^2 f(x).$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} f(x^4) &= f(x) + f(x^3) + kf(x) = (k+1)f(x) + f(x^3) \\ &= (k+1)f(x) + f(x) + f(x^2) + kf(x) = (2k+2)f(x) + f(x^2) \\ &= (3k+4)f(x). \end{aligned}$$

En appliquant les deux égalités précédentes à $x = 2006$, de manière à avoir $f(x) \neq 0$, on déduit que $(k + 2)^2 = 3k + 4$. La résolution de cette équation du second degré montre que nécessairement, $k = 0$ ou $k = -1$. Réciproquement, pour $k = 0$, une solution f est donnée par $f(p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 g(p_1) + \cdots + \alpha_n g(p_n)$ où $g(2) = 2007$ et $g(p) = 0$ pour tout nombre premier $p \neq 2$. La fonction $f : p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n} \mapsto g(p_1) + \cdots + g(p_n)$ convient.

Solution de l'exercice 85. Soit \mathcal{C} le cercle circonscrit à ADE , et soit F le deuxième point d'intersection entre \mathcal{C} et (CA) .



En termes de longueurs algébriques, on a $AC^2 = \overline{CD} \cdot \overline{CE} + \overline{AB} \cdot \overline{AE}$ si et seulement si

$$\overline{AB} \cdot \overline{AE} = AC^2 - \overline{CD} \cdot \overline{CE} = CA^2 - \overline{CA} \cdot \overline{AF} = \overline{AC} \cdot \overline{AF},$$

c'est-à-dire si et seulement si B, C, E, F sont cocycliques. Mais cela a lieu si et seulement si $\widehat{EFC} = \widehat{EBC}$, et

$$\widehat{EFC} = \widehat{EFA} = \pi - \widehat{ADE} = \widehat{CDA}$$

(en angles orientés modulo π). Donc B, C, E et F sont cocycliques si et seulement si $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$, ce qu'on voulait.

Solution de l'exercice 86. Notons $A = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ l'écriture décimale de A . En faisant la soustraction

$$\begin{array}{r} a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_k \quad 0 \\ - \quad \quad a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_{k-1} \quad a_k \\ \hline \end{array}$$

on trouve que les chiffres de $9A = 10A - A$ sont $a_1, a_2 - a_1, a_3 - a_2, \dots, a_{k-1} - a_{k-2}, a_k - a_{k-1} - 1, 10 - a_k$. Leurs somme est $10 - 1 = 9$.

Solution de l'exercice 87. Le nombre

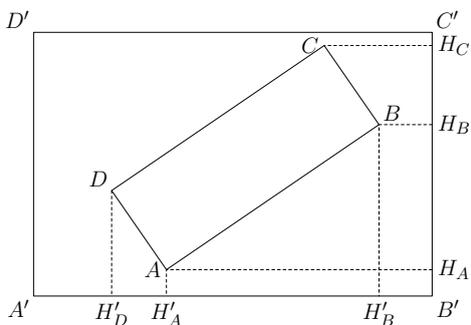
$$\left(5 + \sqrt{26}\right)^{100} + \left(\sqrt{26} - 5\right)^{100} = \sum_{i+j=100} C_{100}^i \cdot (\sqrt{26})^i \cdot 5^j \cdot [1 + (-1)^j]$$

est entier. En effet, le facteur $1 + (-1)^j$ est non nul si et seulement si i et j sont pairs, auquel cas $(\sqrt{26})^i$ est entier. D'autre part,

$$\sqrt{26} - 5 < \frac{1}{10}.$$

En effet, $(5 + 1/10)^2 = 25 + 1 + 1/100 > 26$. Par conséquent, $(\sqrt{26} - 5)^{100} < 10^{-100}$, et donc les 100 premiers chiffres de $(5 + \sqrt{26})^{100}$ après la virgule sont que des neufs.

Solution de l'exercice 88. Ce n'est pas possible. En effet, projetons les sommets A, B, C, D sur les côtés de $A'B'C'D'$ comme sur le schéma suivant :



D'après l'inégalité triangulaire, on a $AB \leq H_A H_B + H'_A H'_B$ et $AD = BC \leq H_B H_C + H'_A H'_D$, et on peut donc majorer le demi-périmètre

$$AB + AD \leq H_A H_B + H_B H_C + H'_A H'_B + H'_A H'_D \leq B' C' + A' B'.$$

Le demi-périmètre de $ABCD$ est majoré par celui de $A'B'C'D'$, il en est donc de même de leurs périmètres.

Solution de l'exercice 89. Non. On a

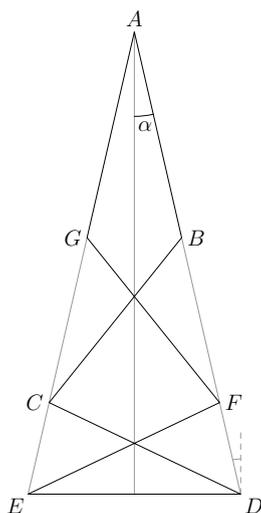
$$1\,000\,000\,027 = 1\,000^3 + 3^3 = (1\,000 + 3) \cdot (1\,000^2 - 1\,000 \cdot 3 + 3^2).$$

Solution de l'exercice 90. On peut réécrire cette égalité de la manière suivante :

$$\sin \frac{7\pi}{30} + \sin \frac{19\pi}{30} + \sin \frac{31\pi}{30} + \sin \frac{43\pi}{30} + \sin \frac{55\pi}{30} = 0.$$

La différence entre deux angles successifs dans cette égalité fait $12\pi/30 = 2\pi/5$. Les extrémités des vecteurs de norme 1 pointant dans les directions indiquées par ces 5 angles forment les sommets d'un pentagone régulier. La somme de ces vecteurs est donc un vecteur invariant par rotation d'angle $2\pi/5$, autrement dit, la somme est nulle. La somme des sinus est la projection de la somme des vecteurs sur l'axe des ordonnées, elle est donc nulle aussi.

Solution de l'exercice 91. La figure est entièrement déterminée par l'énoncé en particulier, elle est symétrique par rapport à la médiatrice de $[DE]$. Notons 2α l'angle que l'on cherche. On a alors $\widehat{AED} = \widehat{ADE} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.



Les triangles DAE et CDE sont isocèles de sommets respectifs A et D . Comme ils ont en commun l'angle \widehat{AED} , ils sont semblables. Il en résulte que $\widehat{CDE} = 2\alpha$. Par ailleurs AGF et BCD sont aussi des triangles isocèles de sommets respectifs G et C . Il en résulte $\widehat{ACB} = 2\alpha$ et :

$$\widehat{BCD} = \pi - 2\widehat{ADC} = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - 2\alpha\right) = 6\alpha.$$

Comme les points A , C et E sont alignés, on a la relation $\widehat{ACB} + \widehat{BCD} + \widehat{DCE} = \pi$, c'est-à-dire $2\alpha + 6\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{14}$ et l'angle cherché vaut $2\alpha = \frac{\pi}{7}$.

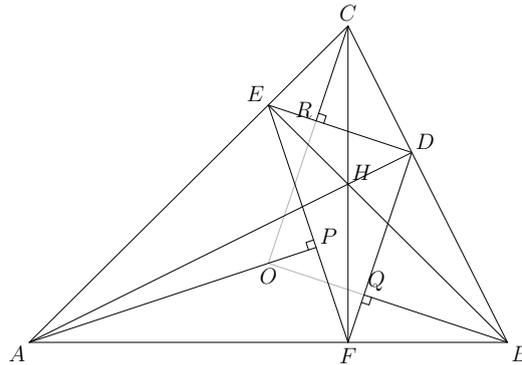
Solution de l'exercice 92. Dans le premier cas, on vérifie facilement que les ensembles $\{3k+1, k \in \mathbb{N}\}$, $\{3k+2, k \in \mathbb{N}\}$ et $\{3k, k \in \mathbb{N}\}$ satisfont la condition. De même, dans le deuxième cas, les ensembles $\{4k+1, k \in \mathbb{N}\}$, $\{4k+2, k \in \mathbb{N}\}$, $\{4k+3, k \in \mathbb{N}\}$ et $\{4k, k \in \mathbb{N}\}$ conviennent. Montrons que ce n'est en revanche pas possible avec seulement trois ensembles. Supposons que trois ensembles A , B , C satisfont la deuxième condition. Notons que les nombres 1, 3, 6 doivent être dans des ensembles différents. Sans perte de généralité, on suppose que $1 \in A$, $3 \in B$, $6 \in C$. Alors $4 \in B$. On remarque également que $2, 5 \notin B$ et 2 et 5 sont dans des ensembles différents. Deux cas possibles : $\{1, 2\} \subset A$, $\{3, 4\} \subset B$, $\{5, 6\} \subset C$ ou bien $\{1, 5\} \subset A$, $\{3, 4\} \subset B$, $\{2, 6\} \subset C$. Mais dans chacun des deux cas, il est impossible de placer 7 dans un des trois ensembles. Ceci achève la démonstration.

Solution de l'exercice 93. On commence par calculer les premiers termes de la suite (x_n) . On trouve :

$$x_2 = 2 \quad ; \quad x_3 = 3 \quad ; \quad x_4 = 2 \quad ; \quad x_5 = 1 \quad ; \quad x_6 = 1$$

et on retrouve deux termes consécutifs égaux à 1. À partir de ce moment, les calculs se répètent, ce qui prouve que la suite (x_n) est périodique, en l'occurrence de période 5. Ainsi $x_{2007} = x_2 = 2$.

Solution de l'exercice 94. On commence par faire une figure :



Nous allons montrer que les trois droites (AP) , (BQ) et (CR) passent par le centre du cercle circonscrit à ABC , appelé O . Les points B , C , E et F sont cocycliques, sur le cercle de diamètre $[BC]$. D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{CBF} = \pi - \widehat{CEF} = \widehat{AEF}$. De plus, encore par le théorème de l'angle inscrit, cette fois dans le cercle circonscrit à ABC , on a $\widehat{ABC} = \widehat{AOC}/2$. Le triangle AOC est isocèle en O et donc

$$\widehat{OAE} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{AOC}}{2} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AEF}.$$

On en déduit $(AO) \perp (EF)$ puis $O \in (AP)$. De la même façon, on obtient $O \in (BQ)$ et $O \in (CR)$.

Solution de l'exercice 95. La propriété de l'énoncé se traduit par l'inégalité :

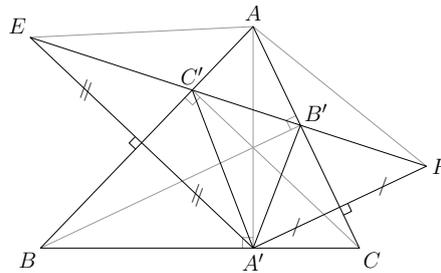
$$0 \leq \frac{A(A+1)}{2} - 1000A = A \left(\frac{A+1}{2} - 1000 \right) \leq 999.$$

Si $A < 1999$, alors le facteur $\frac{A+1}{2} - 1000$ est négatif et l'encadrement n'est pas vérifié. Si $A \geq 2000$, alors le précédent facteur est supérieur à $\frac{1}{2}$ et le produit $A(\frac{A+1}{2} - 1000)$ dépasse 1000. La seule solution est donc $A = 1999$, dont on peut vérifier si on le souhaite qu'elle convient bien.

Solution de l'exercice 96. Choisissons pour l'instant A' quelconque sur le côté $[BC]$ et notons E et F les symétriques respectifs de A' par rapport aux droites (AB) et (AC) . Alors, pour tous B' et C' situés respectivement sur $[AC]$ et $[AB]$, on a :

$$A'C' + C'B' + B'A' = EC' + C'B' + B'F \geq EF.$$

Ainsi les meilleurs choix possibles pour B' et C' (A' étant toujours fixé) sont les points d'intersection de la droite (EF) avec les côtés du triangle, et le périmètre du triangle $A'B'C'$ est alors égal à la longueur du segment $[EF]$. Il s'agit donc de déterminer la position du point A' pour laquelle le segment $[EF]$ a une longueur minimale. Or, on remarque que le triangle AEF est isocèle de sommet A car $AE = AA' = AF$, et que l'angle en A dans ce triangle est constant (*i.e.* ne dépend pas de A') égal à $2\widehat{BAC}$. Ainsi, la longueur EF est-elle proportionnelle à AA' , et est donc minimale lorsque A' est le pied de la hauteur issue de A . On raisonne de même avec les autres sommets et on obtient que B' et C' doivent être les pieds des hauteurs issues respectivement de B et C . (On peut remarquer que dans ce cas, ce sont bien les intersections de la droite (EF) avec (AC) et (AB) .)



Solution de l'exercice 97. Notons tout d'abord que pour $p > 0$, le dernier chiffre de 2^p est 6, 2, 4 ou 8 selon que le reste de p modulo 4 vaut 0, 1, 2 ou 3. Ainsi 2^{101} se termine par un 2. Montrons par récurrence qu'il existe un entier N divisible par 2^{100} et dont les n derniers chiffres sont des 8 et des 9. Pour $n = 1$, il suffit de prendre $N = 2^{103}$ qui se termine par 8. Maintenant, soit N un entier divisible par 2^{100} et dont les n derniers chiffres sont de 8 et des 9. Soit a son $(n+1)$ -ième chiffre en partant de la fin. Soit k la partie entière de $(9 - a)/2$. Considérons le nombre $N' = N + k \cdot 2^{101} \cdot 10^n$. Il est évident qu'il est divisible par 2^{100} et que ses n derniers chiffres sont les mêmes que ceux de N . Quant à son $(n+1)$ -ième chiffre en partant de la fin, il est égal à $a + 2k$, car le dernier chiffre de 2^{101} est un 2. Avec la définition de k , on voit que $a + 2k$ vaut soit 8 soit 9 selon que a est pair ou impair. Nous avons donc réussi de passer de n chiffres à $n+1$ chiffres. Ainsi, en 100 étapes, on obtient un entier divisible par 2^{100} dont les 100 derniers chiffres sont des 8 et des 9. Il suffit alors de ne garder que ces 100 derniers chiffres, car 10^{100} est divisible par 2^{100} .

Solution de l'exercice 98. L'écriture peut ne se terminer par aucun zéro (par exemple pour $n = 0$), se terminer par un zéro (par exemple pour $n = 1$ ou $n = 2$), ou par deux zéros (par exemple pour $n = 3$). Pour $n \geq 3$, 2^n et 4^n sont divisibles par 8, et 3^n est congru à 3 ou 1 modulo 8, donc $1^n + 3^n$ est congru à 2 ou 4. Il s'ensuit que la somme est congrue à 2 ou 4 modulo 8. Or, 1000 est divisible par 8, par conséquent la somme ne peut pas se finir par trois zéros ou plus.

Solution de l'exercice 99. Remarquons que si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les termes d'une progression arithmétique, alors il en est de même de $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|, |\delta|$, et le produit du plus grand et du plus petit parmi $|\alpha|, |\beta|, |\gamma|$ et $|\delta|$ est alors égal au produit des deux termes médians. Soient donc a, b, c, d et e les nombres

de l'énoncé et supposons qu'ils soient classés de telle façon que $|a| \leq |b| \leq |c| \leq |d| \leq |e|$. D'après l'hypothèse, b, c, d et e sont les termes d'une progression géométrique, et donc d'après les remarques préliminaires, on a l'égalité $|b||e| = |c||d|$. De même, on obtient :

$$|a||e| = |c||d| \quad ; \quad |a||e| = |b||d| \quad ; \quad |a||e| = |b||c| \quad ; \quad |a||d| = |b||c|$$

d'où on déduit sans mal l'égalité $|a| = |b| = |c| = |d| = |e|$. Ainsi a, b, c, d et e sont tous soit égaux à 2007, soit égaux à -2007 . Par hypothèse, l'un d'eux, disons a vaut 2007. Si maintenant un autre, disons b vaut -2007 , alors du fait que a, b, c, d forme, à l'ordre près, une suite géométrique, on déduit que c et d valent l'un 2007 et l'autre -2007 , disons $c = 2007$ et $d = -2007$. Mais, si $e = 2007$, alors a, b, c, e contient trois termes positifs ou un négatif et donc ne peut être réordonné en une suite géométrique. On arrive de même à une contradiction si $e = -2007$ en considérant le quadruplet (a, b, d, e) . Au final, tous les nombres sont égaux à 2007.

Solution de l'exercice 100. L'inégalité de gauche est une conséquence du fait que

$$\sqrt{1+x_1+\dots+x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i+\dots+x_n} \leq \frac{1}{2}(1+x_1+\dots+x_n) = 1$$

donné par l'inégalité arithmético-géométrique, qui implique

$$\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{1+x_1+\dots+x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i+\dots+x_n}} \geq \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Pour l'inégalité de droite, posons $\theta_i = \arcsin(x_1 + \dots + x_i)$ pour tout i (on pose $\theta_0 = 0$). On a alors

$$\sqrt{1+x_1+\dots+x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i+\dots+x_n} = \cos \theta_{i-1}$$

et l'égalité désirée devient

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin \theta_i - \sin \theta_{i-1}}{\cos \theta_{i-1}} < \frac{\pi}{2}.$$

On a la majoration suivante :

$$\sin \theta_i - \sin \theta_{i-1} = 2 \cos \frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2} \sin \frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} < \cos \theta_{i-1} (\theta_i - \theta_{i-1}),$$

en utilisant que $\theta_{i-1} < \theta_i$, que \cos est décroissante que $[0, \frac{\pi}{2}]$, et que $\sin x < x$ pour $x > 0$. On a donc

$$\sum_{i=1}^n \frac{\sin \theta_i - \sin \theta_{i-1}}{\cos \theta_{i-1}} < \sum_{i=1}^n \theta_i - \theta_{i-1} = \theta_n - \theta_0 < \frac{\pi}{2},$$

qui était bien ce que l'on voulait.

4 Les tests

4.1 Les énoncés

Stratégies de base

Exercice 1 (USAMO, 1994). On considère une suite d'entiers a_1, a_2, \dots telle que $a_1 > 0$ et $a_{n+1} > a_n + 1$ pour tout $n > 0$. Soit $b_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Montrer que pour tout n , il existe un carré parfait k^2 tel que $b_n \leq k^2 < b_{n+1}$.

Exercice 2 (Engel, Problem-Solving Strategies). Xavier a rempli un tableau 3×3 comme sur la figure 1. Il dit à Dimitri : « Tu as le droit de modifier mon tableau, mais pas n'importe comment, seulement

en choisissant deux cases côte-à-côte, et en leur ajoutant un même nombre entier (relatif). Mais tu peux le faire plusieurs fois si tu veux.» Un peu plus tard, Dimitri revient tout content : « J'ai obtenu la grille 2 ! » annonce-t-il à Xavier. Mais Xavier n'est pas content. « Tu as triché, tu n'as pas respecté mes règles. » Qui a raison ?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

figure 1

7	8	9
6	2	4
3	5	1

figure 2

Exercice 3 (*Taiwan, 2001*). Soit S l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ des entiers entre 1 et n . On choisit n parties deux à deux distinctes de S , notées A_1, \dots, A_n . Montrer qu'il existe un élément x de S tel que les parties $B_1 = A_1 \setminus \{x\}, \dots, B_n = A_n \setminus \{x\}$ soient également deux à deux distinctes.

Remarque : la notion $A \setminus \{x\}$ désigne l'ensemble A auquel on a retiré l'élément x (si x n'est pas dans A , $A \setminus \{x\} = A$).

Géométrie

Exercice 1. Soient Γ un cercle, $[BC]$ une corde de Γ . Soit A le milieu de l'arc \widehat{BC} . Par A on mène deux cordes quelconques $[AD]$ et $[AE]$ qui coupent le segment $[BC]$ en F et G respectivement. Montrer que le quadrilatère $DFGE$ est inscriptible dans un cercle.

Exercice 2 (*Olympiades russes de géométrie 2005*). Dans un cercle, les cordes $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en P . Les perpendiculaires à (AC) et à (BD) en C et D respectivement se coupent en Q . Montrer que (AB) est perpendiculaire à (PQ) .

Exercice 3 (*Engel, Problem-Solving Strategies*). Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé. On construit les triangles équilatéraux ABE et CGD , extérieurement au quadrilatère, et BCF et DHA , intérieurement au quadrilatère. Montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.

Exercice 4 (*USAMO, 1974*). On considère un triangle équilatéral de côté x , et un point à l'intérieur dont les distances aux sommets sont a, b, c . Considérons maintenant un triangle ABC de côtés a, b, c , et un point M à l'intérieur du triangle tel que $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA}$. Montrer que $MA + MB + MC = x$.

Exercice 5 (*Olympiades 1995*). Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe tel que :

$$AB = BC = CD, \quad DE = EF = FA, \quad \widehat{BCD} = \widehat{EFA} = 60^\circ$$

Soit G et H deux points intérieurs à l'hexagone tels que $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120^\circ$. Montrer l'inégalité :

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$$

Arithmétique

Exercice 1 (Engel). Soient a et b des entiers. Montrer que si 9 divise $a^2 + ab + b^2$, alors a et b sont multiples de 3.

Exercice 2 (Engel). Est-il possible que le produit de trois nombres entiers consécutifs soit de la forme a^n , avec $a \geq 2$ et $n \geq 2$ des entiers positifs ?

Exercice 3 (USAMO 1993). Soient r et s deux entiers positifs impairs. On considère la suite (a_n) définie par $a_1 = r$, $a_2 = s$, et pour tout $n > 0$, a_{n+1} est le plus grand diviseur impair de $a_n + a_{n-1}$.

Montrer que cette suite reste constante à partir d'un certain rang et calculer la valeur de la constante finale en fonction de r et s .

Exercice 4 (Kürschák 1980). Soit n un entier impair positif. Montrer qu'il existe des entiers positifs a et b tels que

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

si et seulement si n possède un diviseur premier congru à 1 modulo 4.

Exercice 5 (Engel). Dans la région reculée de Torturie, le vizir dispose en cercle n condamnés, numérotés dans l'ordre entre 1 et n . Implacablement, il envoie au bourreau un condamné sur deux : les condamnés 2, 4, ..., et ainsi de suite en tournant autour du cercle, en sautant une personne entre deux supplices, jusqu'au moment où il n'en reste plus qu'un.

Calculer en fonction de n le numéro du dernier condamné restant.

4.2 Les solutions

Stratégies de base

Solution de l'exercice 1. Soit k un entier fixé : le plus grand carré strictement inférieur à b_k , noté M^2 vérifie $(M+1)^2 = M^2 + 2M + 1 \leq b_k + 2M$. On veut donc montrer $2M < a_{k+1}$, par exemple en montrant que $4b_k < a_{k+1}^2$.

Pour $k = 1$, on doit vérifier que $4a_1 < a_2^2$, ce qui est vrai car $a_2^2 \geq (a_1 + 2)^2 = 4a_1 + a_1^2 + 4$. Supposons que $4b_n < (a_{n+1})^2$. Alors

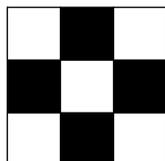
$$4b_{n+1} = 4b_n + 4a_{n+1} < a_{n+1}^2 + 4a_{n+1} < a_{n+1}^2 + 4a_{n+1} + 4 \leq a_{n+2}^2$$

et par récurrence sur n , $4b_n < a_{n+1}^2$, d'où l'on déduit, pour $n = k$, que $(2M)^2 < 4b_k < a_{k+1}^2$, comme recherché.

On a donc $(M+1)^2 < b_{k+1}$, et $(M+1)^2 \geq b_k$ par définition de M .

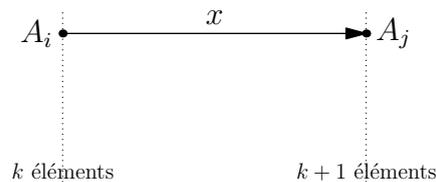
Solution de l'exercice 2. C'est Xavier qui a raison.

On colorie les cases alternativement en noir et blanc comme sur la figure suivante. Deux cases côte-à-côte sont de couleur différente ; la quantité obtenue en faisant la différence de la somme des cases noires par celle des cases blanches est un invariant. Pour la première grille, il vaut -5 , et pour la deuxième, il vaut 1. On ne peut donc pas passer de l'une à l'autre en respectant les règles données par Xavier.



Solution de l'exercice 3. Supposons qu'il n'existe pas de tel x . Alors quel que soit le choix de x dans S , les parties $A_i \setminus \{x\}$ ne sont plus distinctes. Ceci ne peut arriver que si deux A_i diffèrent exactement de l'élément x (car les A_i sont distincts).

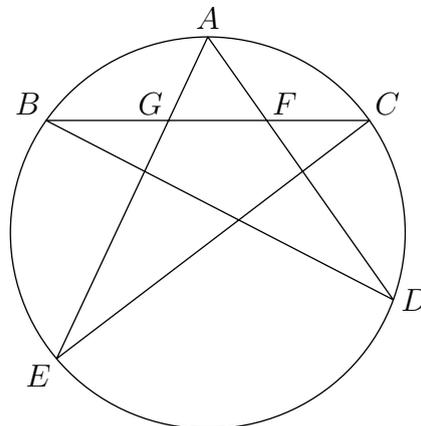
Plaçons un point pour chaque A_i , on les classe de gauche à droite suivant le nombre d'éléments. Pour chaque x dans S , on choisit un A_i et un A_j tel que $A_j = A_i \cup \{x\}$, et on trace une flèche étiquetée « x » de A_i vers A_j .



Retirons maintenant les points qui n'ont qu'une seule flèche (entrante ou sortant). Lorsque ce n'est plus possible, il reste toujours autant de points que de flèches et chaque point est doté exactement de deux flèches. En partant d'un point, on construit ainsi un polygone en suivant les flèches (un cycle). Celui-ci est constitué de deux chemins qui partent du point G le plus à gauche du cycle pour arriver au point D le plus à droite. Mais ces deux chemins sont étiquetés par les éléments de $D \setminus G$, et comme chaque étiquette n'apparaît qu'une fois, c'est impossible.

Géométrie

Solution de l'exercice 1.



Faisons la chasse aux angles. On a :

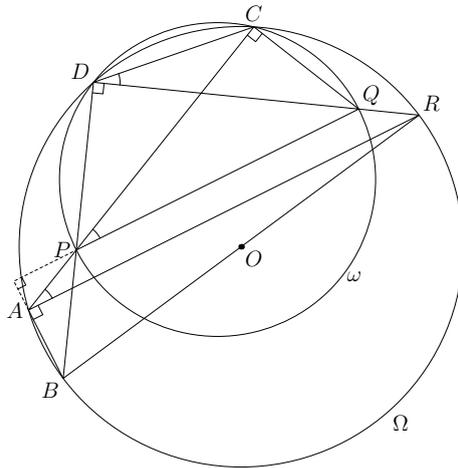
$$\widehat{BGE} = \widehat{BCE} + \widehat{AEC} = \widehat{BDE} + \widehat{ADC}$$

Or les arcs \widehat{BA} et \widehat{AC} sont égaux d'où :

$$\widehat{BGE} = \widehat{BDE} + \widehat{ADB} = \widehat{ADE}.$$

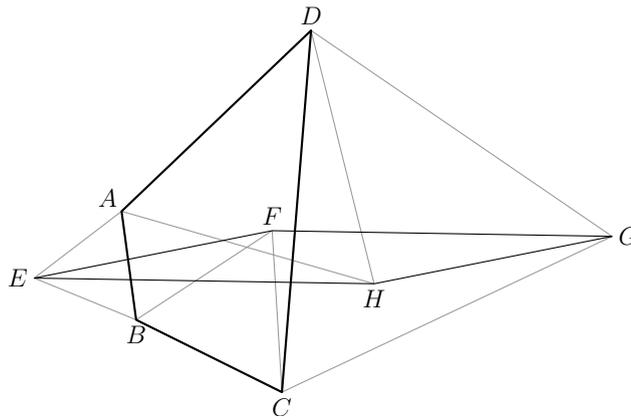
Par conséquent les angles \widehat{EGF} et \widehat{EDF} sont supplémentaires, donc le quadrilatère $DFGE$ est inscriptible.

Solution de l'exercice 2. Notons Ω notre cercle. On introduit le point R , intersection de la droite (DQ) avec Ω .



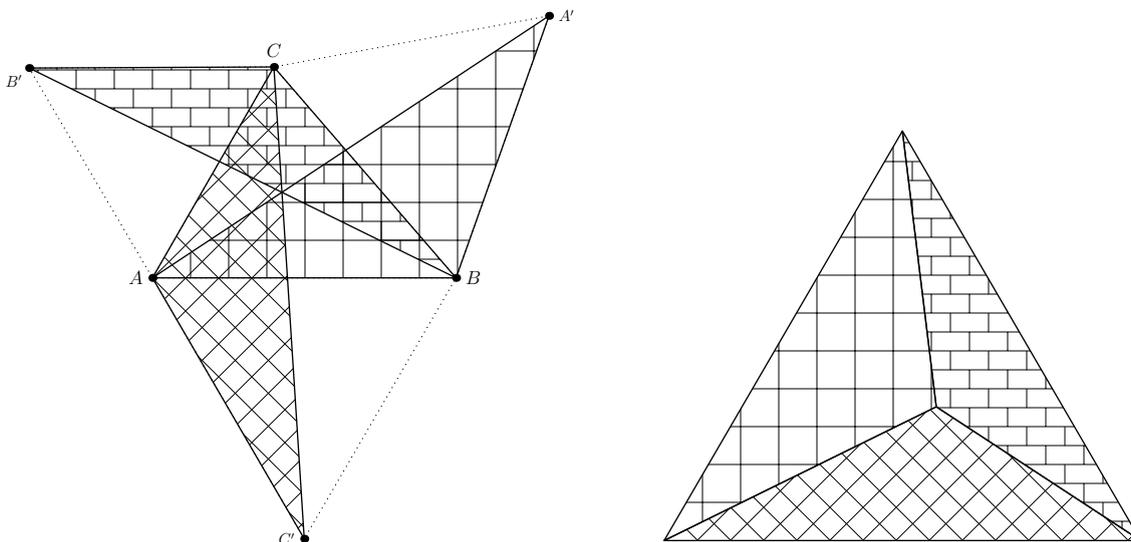
Comme $\widehat{PDQ} = \widehat{PCQ}$, les points P, D, C et Q sont cocycliques ; notons ω le cercle passant par ces points. On en déduit l'égalité des angles inscrits \widehat{QPC} et \widehat{QDC} . Dans le cercle Ω , le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{RAC} = \widehat{RDC}$, et donc $\widehat{RAC} = \widehat{QPC}$. Par suite, les droites (AR) et (PQ) sont parallèles. Par ailleurs, \widehat{BDR} étant droit, $[BR]$ est un diamètre du cercle, et il s'ensuit que \widehat{BAR} est droit. Le parallélisme des droites (AR) et (PQ) fournit le résultat annoncé.

Solution de l'exercice 3. On commence par faire une figure :



La rotation de centre A et d'angle 60° transforme E en B et H en D , donc le segment $[EH]$ en $[BD]$. La rotation de centre C et d'angle 60° transforme de même le segment $[FG]$ en $[BD]$. Comme (EH) et (FG) font chacun un angle (orienté) de 60° avec (BD) , on déduit que (EH) et (FG) sont parallèles. On montre de même que (EF) et (HG) sont parallèles. Donc $EFGH$ est un parallélogramme.

Solution de l'exercice 4.

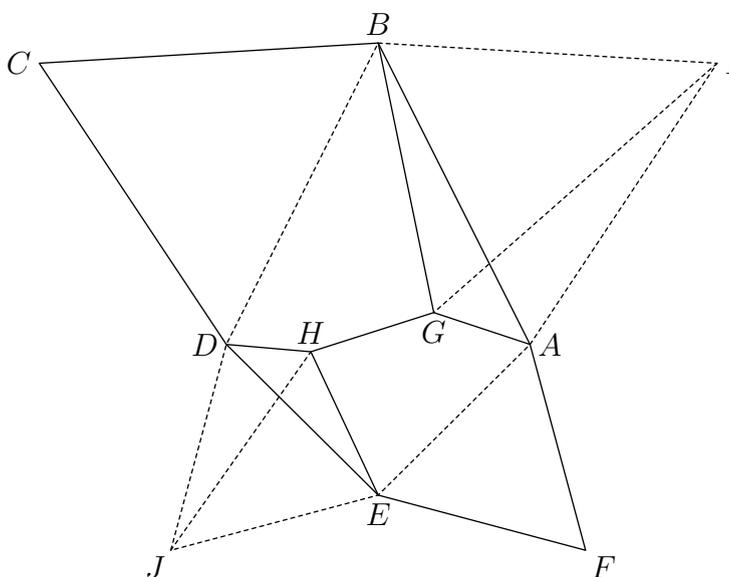


Construisons les triangles équilatéraux extérieurs à ABC s'appuyant sur les côtés. Le point d'intersection de deux des cercles circonscrits à ces triangles vérifie $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA}$, il est donc sur le troisième. Par construction, (AM) , (BM) , et (CM) sont les bissectrices des angles en M , et passent respectivement par les sommets des triangles équilatéraux A' , B' , C' opposés à A , B , C .

On a $MA + MB + MC = MA + MA' = AA' = BB' = CC'$. Remarquons alors que les triangles ABA' , BCB' , CAC' ont au total deux côtés de longueurs a , b ou c et trois côtés de longueurs AA' . On peut donc (vérifier que la somme des angles au sommet fait 360°) former avec ces morceaux un triangle équilatéral muni d'un point à distances a , b , c des sommets. Son côté est obligatoirement $x = AA' = MA + MB + MC$.

Solution de l'exercice 5. On construit extérieurement à l'hexagone les points I et J de telle sorte que les triangles ABI et DEJ soient équilatéraux. Par symétrie par rapport à l'axe BE on a $IJ = CF$.

Comme $\widehat{AGB} = \frac{2\pi}{3}$, le point G appartient au cercle circonscrit au triangle ABG d'où $AG + BG = IG$. De même on a $DH + EH = JH$. L'inégalité à montrer devient alors $IG + GH + HJ \geq IJ$ ce qui est trivial.



Arithmétique

Solution de l'exercice 1. On a en fait $a^2 + ab + b^2 = (a - b)^2 + 3ab$. C'est un multiple de 9, en particulier, donc 3 divise $(a - b)$, mais 9 aussi. Du coup, 9 est diviseur de $3ab$, donc a ou b est multiple de 3, mais comme 3 divise $(a - b)$, le résultat est encore vrai.

Solution de l'exercice 2. On a $(n - 1)n(n + 1) = n(n^2 - 1)$. Si ce nombre était une puissance k -ième, n et $n^2 - 1$ le seraient aussi, donc on aurait $n = a^k$, $n^2 - 1 = b^k$ d'où $(a^2)^k - b^k = 1$ ce qui est impossible.

Solution de l'exercice 3. Remarquons que $a_{n+2} \leq (a_n + a_{n+1})/2$ puisque $a_n + a_{n+1}$ est un nombre pair, donc a_{n+2} en est un diviseur strict. Ainsi, $a_n + a_{n+1}$ est une suite décroissante d'entiers positifs, par conséquent elle est constante à partir d'un certain rang N . Or si $a_n + a_{n+1} = a_{n+1} + a_{n+2}$, $a_n = a_{n+2} \leq (a_n + a_{n+1})/2$ donc $a_n \leq a_{n+1}$ pour tout $n \geq N$. La suite (a_n) elle-même est donc constante à partir du rang N .

Par ailleurs, on vérifie facilement que le PGCD de a_n et a_{n+1} est aussi le PGCD de a_{n+1} et $a_n + a_{n+1}$ donc celui de a_{n+1} et a_{n+2} car a_{n+1} est impair. La limite de la suite est donc le PGCD de r et s .

Solution de l'exercice 4. Supposons que n s'écrive sous la forme demandée. Alors $(a + b)n = 4ab$. Soit d le PGCD de a et b , $a = d\alpha$, $b = d\beta$. Alors $(\alpha + \beta)n = 4d\alpha\beta$. En particulier, 4 divise $\alpha + \beta$ donc α est de la forme $2k + x$ et β est de la forme $2k - x$, avec x un certain nombre impair. Alors $\alpha\beta$, qui est premier avec $\alpha + \beta$, divise n et il vaut $4k^2 - x^2$, qui est congru à -1 modulo 4, et il possède par conséquent un facteur premier de cette forme.

Réciproquement, soit n un nombre de la forme $4k - 1$ (si n en est un multiple, on a encore une solution en multipliant a et b). On veut $(a + b)n = 4ab$. Alors 4 divise $a + b$, donc on suppose $a = 2l + x$ et $b = 2l - x$. On voudrait donc $ln = (4l^2 - x^2)$. Mais $n = 4k - 1$, donc on cherche

$$x^2 = 4l^2 - 4kl + l = (2l - k)^2 + k^2 - l.$$

Choisissons donc $l := k^2$ et $x := 2k^2 - k$. On a bien

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{4k^2 - k} + \frac{1}{k}.$$

Solution de l'exercice 5. On note $f(n)$ le numéro du dernier condamné restant. On note l'écriture de n en base 2

$$n = b_0 + b_1 \times 2 + b_2 \times 4 + \dots + b_k \times 2^k.$$

Supposons $b_0 = 0$. Alors n est pair : lors du premier tour, on élimine tous les condamnés pairs, et on recommence avec $1, 3, \dots, 2n/2 + 1$. On élimine 3, puis 7..., et le nombre qui restera est $f(n) = 2f(n/2) - 1$.

Supposons $b_0 = 1$. Alors n est impair : lors du premier tour, on élimine tous les condamnés pairs, et on recommence avec $n, 1, 3, \dots, 2(n - 1)/2 + 1$. On élimine 1, puis 5, puis 7... Tout ce qui passe comme si on posait le problème avec pour points $3, \dots, 2(n - 1)/2 + 1$, donc

$$f(n) = 2f\left(\frac{n-1}{2}\right) + 1.$$

Soit c_k le nombre qui vaut -1 si $b_k = 0$ et 1 si $b_k = 1$. On a en fait $c_k = 2b_k - 1$. On peut donc résumer ce qu'on vient de dire par $f(2b + b_0) = 2f(b) + c_0$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(b_0 + b_1 \times 2 + b_2 \times 4 + \dots + b_k \times 2^k) &= c_0 + 2 \times f(b_1 + b_2 \times 2 + \dots + b_k \times 2^{k-1}) \\ &= c_0 + 2 \times c_1 + 4 \times f(b_2 \times 2 + \dots + b_k \times 2^{k-2}) \\ &= \dots \\ &= c_0 + c_1 \times 2 + c_2 \times 4 + \dots + c_k \times 2^k \\ &= 2(b_0 + b_1 \times 2 + b_2 \times 4 + \dots + b_k \times 2^k) - (1 + 1 \times 2 + 1 \times 4 + \dots + 1 \times 2^k) \end{aligned}$$

D'où $f(n) = 2(n - 2^k) + 1$: depuis l'écriture en base 2 de n , l'écriture de $f(n)$ en base 2 est obtenue en déplaçant le chiffre «1» le plus à gauche du côté droit.

Par exemple, si $n = 25$, qui s'écrit 11001 en base 2, $f(n)$ s'écrit 10011 en base 2, ce qui donne 19. En effet, les condamnés éliminés sont successivement

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
1	5	9	13	17	21	25					
7	15	23									
11	3										

et il reste 19 à la fin.

IV. Quelques informations sur les olympiades internationales

1 Compte-rendu des OIM 2007 (Hanoï, Vietnam) par Xavier Caruso

Qu'est-ce qu'une délégation ? Une délégation à une Olympiade est généralement composée de huit personnes qui se répartissent comme suit :

- un chef de délégation (*Leader*) ; en général Claude Deschamps pour la France
- un adjoint (*Deputy Leader*) ; en général Johan Yebbou pour la France
- les six candidats (*Contestants*) ; numérotés par ordre alphabétique de FRA1 à FRA6 pour la France

À ces gens peuvent s'ajouter des observateurs qui se répartissent encore en trois catégories A, B et C selon qu'ils restent aux côtés du chef de délégation, de l'adjoint ou des candidats. Cette année, à Hanoï, 98 pays étaient représentés pour un total de 522 candidats, 93 chefs, 88 adjoints et 84 observateurs (certains pays n'ont envoyé que des observateurs). J'étais moi-même observateur B, et j'ai donc passé la totalité de l'Olympiade avec Johan Yebbou épiant chacun de ses faits et gestes.



La délégation française cette année, à Hanoï

Avant le début officiel de l'Olympiade Les chefs de délégation arrivent quelques jours avant la cérémonie d'ouverture pour choisir collectivement les problèmes qui seront proposés à la compétition. Le choix s'effectue parmi les exercices de la liste courte, mise au point au préalable par le pays organisateur et résultant d'une première sélection des propositions envoyées par chacun des pays participants. L'adjoint, quant à lui, accompagne les candidats et arrive généralement la veille de la cérémonie d'ouverture. Cette année, nous avons décidé d'avancer notre voyage de quelques jours pour faire un dernier entraînement sur place et également avoir plus de temps pour s'habituer au décalage horaire. Ainsi, nous sommes arrivés pratiquement le même jour que Claude Deschamps.

Bien entendu, pendant cette période pré-Olympiade pendant laquelle les exercices sont choisis, il semble préférable, afin de limiter les possibilités de triche, d'interdire tout contact entre les chefs de

délégation et leurs équipes respectives. On m'a relaté que selon les années, cette précaution était appliquée avec plus ou moins de sérieux et d'efficacité. Généralement toutefois, les mesures suivantes sont toujours prises : les chefs de délégation ne logent pas dans le même hôtel que leur équipe (et souvent aussi pas dans la même ville), et les lieux de résidence sont tenus, dans une certaine mesure, secrets. Épisodiquement, il arrive que l'on assiste à des mesures de prévention plus rudes, comme par exemple la confiscation des téléphones portables jusqu'à la fin des épreuves. Cette année, il faut avouer que les mesures étaient exceptionnellement sévères : les chefs de délégation étaient quasiment emprisonnés dans leur hôtel gardé par la police sans autorisation de communiquer avec l'extérieur, et évidemment sans accès à Internet. Au bout de quelques jours, ne pouvant plus supporter cet isolement, ils ont obtenu le droit de sortir en ville en groupe de cinq minimum à condition de signaler tous leurs déplacements aux policiers de garde.

L'arrivée Dès la descente de l'avion, l'équipe d'organisation de l'Olympiade prend en charge les diverses délégations, et les conduit dans les hôtels adéquats. À chaque délégation, il est en particulier affecté un guide chargé de rester auprès des élèves (et de servir d'interprète) pendant toute la durée du séjour. Traditionnellement, chaque participant reçoit quelques petits cadeaux comme un sac à dos, un carnet de notes, des stylos, un T-shirt, *etc.* mais bien entendu, cela varie selon les années. Cette fois-ci, nous avons eu comme cadeau original un parapluie, les orages étant traditionnellement plutôt fréquents au Vietnam en cette saison. (Il faut dire cependant que, durant notre séjour, le temps a été plutôt très clément, et les pluies vraiment rares.)

Signalons que depuis quelques années, les hôtels sont excessivement luxueux, pas moins de trois étoiles, et souvent au-delà, avec en plus une tendance à la surenchère pour les hôtels des chefs de délégation. Cette année se distinguait encore des précédentes par le fait que dès le début de l'Olympiade les adjoints (et les observateurs B) étaient séparés des lycéens. Un système de bus avait toutefois été mis en place pour que les adjoints puissent rendre visite à leurs élèves et les soutenir pendant les derniers moments précédant les épreuves.



La panoplie du parfait participant



Notre guide



Une chambre d'hôtel d'élèves

La cérémonie d'ouverture C'est sans surprise la cérémonie d'ouverture qui marque officiellement le début de l'Olympiade. Elle comprend généralement plusieurs discours des responsables des Olympiades et du pays organisateur, ainsi que le défilé des candidats de tous les pays. Il est plutôt conseillé aux candidats de revêtir une tenue élégante ce jour-là puisqu'ils vont être amenés à monter sur scène. Certaines délégations défilent avec un drapeau de leur nation, quelquefois arborent une mascotte ou lancent des bonbons dans la salle. Il serait peut-être souhaitable que la France fasse aussi des efforts dans cette direction : par exemple, on pourrait habiller les élèves avec des « uniformes », deux bleus, deux blancs et les deux derniers rouges. Finalement, il arrive qu'un petit spectacle agrémente cette réception officielle, comme c'était le cas cette année.



Un spectacle ouvre la cérémonie



L'équipe française défile

Évidemment, à l'issue de la cérémonie, les chefs de délégation d'une part et les adjoints et candidats d'autre part sont reconduits dans leurs hôtels respectifs, si possible sans que ceux-ci n'aient pu ni se voir, ni se parler. (Comme je l'ai déjà mentionné, cette année, la sécurité semblait vraiment optimale, et de fait on n'a su que plus tard où les chefs étaient placés dans la salle.)

Les épreuves Le lendemain, commence le concours. Celui-ci s'étale sur deux jours en deux épreuves de quatre heures et demie chacune. Chaque épreuve comporte trois exercices, chacun noté sur sept points. Le total général est donc sur 42. Bien que chaque exercice rapporte autant de points, le premier énoncé de chaque journée est jugé plus facile que le second, lui-même plus facile que le troisième. Il est donc fortement conseillé aux candidats de traiter en priorité le premier exercice.

Pratiquement, les élèves sont tout d'abord transportés (en général par bus) de leur hôtel à la salle (ou aux salles) d'examen où ils se répartissent selon un plan de table défini à l'avance par le pays organisateur. Il va de soi que les candidats d'une même délégation sont dispersés au mieux dans les différentes salles. Tout le nécessaire de travail est normalement fourni aux élèves au début de l'épreuve, notamment les feuilles, mais il est malgré tout conseillé d'apporter quelques affaires personnelles, comme une règle, un compas, des stylos de couleur, et éventuellement de la nourriture ou des boissons (quelques biscuits et de l'eau sont selon les années aussi fournis). Seulement lors de la première demi-heure, il est autorisé à poser des questions sur d'éventuelles imprécisions de l'énoncé (de toute façon, très rares) : il est donc important que le candidat prenne un peu de temps au début de l'épreuve pour s'assurer qu'il comprend bien l'intégralité de l'énoncé, avant de se lancer dans la résolution du premier problème (qui est, rappelons-le, le plus facile et celui par lequel il faut commencer). Les questions doivent être posées par écrit et sont transmises sans retouche à l'intégralité des chefs de délégation, qui décident collégalement quelle réponse il convient de donner (qui, selon Johan, est la plupart du temps « L'énoncé est clair! »)... ceci encore une fois dans l'idée de respecter le principe d'équité.



L'arrivée des candidats

Il convient de signaler que le déroulement de l'examen est très codifié. Par exemple, chaque candidat a, à sa disposition, différents panneaux qu'il est censé lever lorsqu'il souhaite adresser une requête. Ainsi existe-t-il un panneau « Help » pour signaler un problème urgent de santé, un panneau « More paper » pour demander de nouvelles feuilles de copie ou de brouillon, un panneau « Toilet » pour aller aux toilettes et finalement un panneau « Water » pour, vous l'aurez deviné, demander de l'eau. Si vous avez l'esprit aussi tordu que notre dernier médaillé d'or, vous remarquerez que l'on peut s'amuser à combiner les panneaux pour obtenir des phrases comme « Help, more toilet water ! », mais ce n'est cependant pas conseillé. Bizarrement, il n'y a pas (du moins, il n'y avait pas cette année) de panneau dédié pour poser une question sur l'énoncé ; dans les cas non prévus, il suffit normalement de lever la main et d'attendre qu'un humain vienne s'inquiéter du problème. En théorie, tout devrait se dérouler dans le silence le plus absolu, mais il faut avouer que, les jeunes étant ce qu'ils sont : -), on assiste parfois à quelques comportements étonnants, de quoi passer un petit moment de détente au milieu de ces heures de réflexion. Au terme des quatre heures et demie, les élèves rendent leurs copies et *tous* leurs brouillons. Insistons réellement sur le fait qu'il est tout à fait primordial de rendre *tous* les brouillons puisqu'une simple remarque d'apparence anodine peut rapporter des points. Je reviendrai sur cela par la suite lorsque je parlerai de la coordination.

Certains de nos candidats nous ont avoué que les épreuves d'une Olympiade peuvent être déstabilisantes pour beaucoup de raisons. Évidemment, il y a l'aspect formel qui vient d'être mentionné, mais aussi le fait de composer dans un pays étranger, dans une salle que l'on ne connaît pas, entouré de personnes que l'on n'a jamais vues, et dans une atmosphère peut-être un peu particulière (ce n'est pas tous les jours que l'on représente la France !). Bref, il semble utile d'avoir en tête ces aspects de la compétition et éventuellement de s'être légèrement préparé à les affronter sereinement.



La salle d'examen

Après le gong final et le ramassage des copies, les élèves sont reconduits à leur hôtel où les adjoints (qui ont eu en général des visites organisées le matin) les attendent de pied ferme pour leur demander leurs premières impressions sur l'épreuve et quels exercices ils ont résolu intégralement ou partiellement. C'est également à ce moment que les adjoints prennent connaissance du sujet de l'Olympiade ; ainsi, ils sont évidemment plus ou moins démunis devant les commentaires des élèves qui s'enchaînent souvent très vite : comment répondre par exemple intelligemment à « Pour l'exercice 2, j'ai utilisé la droite de Simson, c'est bien ? » lorsque l'on découvre à peine l'énoncé ? C'est aussi

l'occasion rêvée pour les élèves de justifier leur échec en argumentant que la difficulté des exercices n'avait rien à voir avec celle des années précédentes. Évidemment, les adjoints (et leurs observateurs) déchantent rapidement après s'être plongé quelques minutes dans le sujet. Blague à part, cette rencontre post-épreuve est très importante pour la suite des événements puisque ce sont les adjoints (avec les chefs) qui devront défendre les copies de leurs candidats ; ainsi s'ils savent à l'avance quelles pages sont importantes, quels arguments sont incomplets, quelles sont les idées directrices, *etc.* ils auront plus de facilité par la suite à bâtir une argumentation qui rapportera le maximum de points à la copie.

L'après-midi qui suit est en général laissé libre pour tout le monde. Il faut noter qu'il est mis à la disposition des élèves (et aussi des adjoints) de nombreuses activités pour occuper leur temps libre : on compte notamment traditionnellement des salles de jeux (jeux de société, échecs), des salles informatique avec accès à Internet, des possibilités pour faire du sport, *etc.* Bien entendu, les dispositifs diffèrent d'une année sur l'autre en fonction des infrastructures dont dispose le pays organisateur, mais la tendance générale tend à proposer une quantité suffisamment vaste d'activités qui peut satisfaire tout le monde.



Un match de waterpolo entre élèves

La coordination Commence ensuite la correction et la notation des copies, travail portant le nom de coordination et réalisé en commun par les chefs de délégation, les adjoints et les coordinateurs. Pour cela, il faut commencer par réunir chefs et adjoints dans un même hôtel : Johan me fait savoir que ce sont plus souvent les adjoints qui se déplacent jusqu'à l'hôtel des chefs (bien que la solution inverse ait déjà été vue), l'avantage semblant être d'éloigner la coordination du lieu de résidence des candidats. C'est en tout cas ce qu'il s'est passé cette année au Vietnam, où nous avons rejoint les chefs dans un hôtel encore plus luxueux près de la baie d'Halong.

Les copies et les brouillons sont également acheminées sur les lieux de la coordination et photocopiées : un exemplaire (l'original) revient au chef de délégation et un autre (la photocopie) aux coordinateurs. Évidemment, les chefs de délégation ne reçoivent que les copies de leurs élèves, alors que les coordinateurs ont un exercice attribué. Les deux partis prennent connaissance du contenu du travail des élèves et mettent chacun indépendamment une note selon un barème malgré tout très précis. Pendant les deux jours suivants (parfois, cela peut durer plus de temps), se succèdent les coordinations : selon un planning décidé à l'avance, les chefs de délégation accompagnés de leurs adjoints (et éventuellement des observateurs) rencontrent les coordinateurs et se mettent d'accord (ou pas) sur la note à attribuer à l'élève.

Généralement, il n'y a pas vraiment matière à pinailler étant donné la précision du barème. En tout cas, la plupart de nos coordinations se sont conclues rapidement. Malgré tout, il peut apparaître

des discussions lorsque la copie traitée n'est pas claire, typiquement lorsque les principaux arguments ne sont pas dans l'ordre ou dissimulés dans les brouillons. C'est alors à nous d'expliquer aux coordinateurs que la copie a plus de valeur qu'il n'y paraît au premier regard, et de quémander quelques points supplémentaires. Il va sans dire que si l'on arrive parfois à obtenir quelques miettes, cela n'est pas comparable à ce que l'on pourrait avoir avec un effort minimum de rédaction.



Johan et Claude discutent pour quelques points supplémentaires

Avant de poursuivre, donnons quelques idées sur la manière dont sont conçus les barèmes. Souvent plusieurs solutions sont envisageables pour résoudre un exercice, et dans ce cas, les plus naturelles d'entre elles sont complètement balisées : tel résultat intermédiaire rapporte tant de points, tel autre en rapporte tant mais seulement si la démarche du candidat montrait clairement qu'il avait une idée assez précise de la façon dont l'utiliser, *etc.* En outre, il faut savoir qu'avant tout une telle solution (balisée) est classée soit en « début de solution » soit en « solution presque complète », selon des critères qui pour le coup peuvent parfois être subjectifs ; c'est donc le moment de marchander lorsqu'une copie est tendancieuse à ce point de vue. Dans le cas du « début de solution », le barème n'attribue en général pas plus de quatre points, et, comme je le disais précédemment, ceux-ci dépendent des résultats intermédiaires obtenus. Dans le cas d'une « solution presque complète », la note ne peut descendre en dessous de cinq points, et habituellement il est retiré un point par erreur ou lacune. Finalement, il arrive que la copie ne suive pas clairement un cas prévu par le barème : il est possible que l'idée soit complètement originale, mais il est plus fréquent que certains résultats soient prouvés sans véritable cohérence, et surtout répertoriés dans plusieurs solutions distinctes. C'est alors à la force de l'argumentation des chefs et des adjoints que se joue la note finale ; malgré tout, il est rare que celle-ci puisse atteindre des sommets faramineux.

Au regard de ce qui précède, les conseils que l'on peut donner à nos futurs candidats sont les suivants. Tout d'abord, mais cela va de soi, essayez autant que possible de rédiger clairement, proprement et précisément, aussi bien d'ailleurs sur vos copies que sur vos brouillons. En effet, si l'exercice n'est pas résolu entièrement, c'est généralement dans vos brouillons que l'on pourra trouver des résultats partiels qui peuvent rapporter des points. Si ceux-ci sont démontrés à la va-vite, il sera plus difficile pour nous de justifier qu'il était bien clair que vous aviez vu qu'il s'agissait là d'un résultat important et que si la rédaction de la preuve souffre de quelques lacunes, c'est simplement par manque de temps. Par ailleurs, sans aller jusqu'à faire un catalogue complet pour chaque exercice, n'hésitez pas à mentionner (sur vos brouillons) toutes les idées un tant soit peu sérieuses qui vous passent par la tête, si possible même en les détaillant un minimum. Par exemple, cette année, le barème octroyait plus ou moins un point si le candidat avait parlé de descente infinie sur l'exercice 5 sans pour autant avoir vraiment développé cette piste. Mentionnons pour finir qu'en temps normal, les erreurs qui apparaissent sur les brouillons ne font perdre aucun point ; ce n'est malgré tout pas une raison pour aligner inepties sur inepties car l'on comprend aisément que dans le cas où l'on trouve dans votre copie une formule à partir de laquelle on peut résoudre l'exercice en deux lignes (ce qu'évidemment

vous n'avez pas remarqué), il sera plus facile pour nous d'expliquer que vous étiez très proche de la solution et que vous auriez certainement conclu avec juste un peu plus de temps (et donc que vous méritez au moins cinq points) si ladite formule n'apparaît pas comme par magie au milieu d'un ramassis d'autres relations du même type, la plupart étant fausses. (Cette histoire n'est pas une fiction : elle s'est plus ou moins déroulée cette année même.)

Bien que ce cas soit très rare, il est possible que les avocats (chefs et adjoints) et les coordinateurs n'arrivent pas à se mettre d'accord sur la note finale au terme de leur petite délibération. Dans cette situation, on remonte dans la hiérarchie, et c'est d'abord le chef des coordinateurs qui continue l'arbitrage. Si aucun accord n'est trouvé au terme de ce second round, la décision finale est votée par l'ensemble des chefs de délégation lors de la dernière réunion du jury, présentée juste après.

La dernière réunion du jury À l'issue de la coordination, l'ensemble des chefs de délégation se réunit une dernière fois. Comme mentionné précédemment, ils examinent d'abord les éventuels conflits non encore résolus entre avocats et coordinateurs. Ils décident ensuite les barres pour les médailles de bronze, d'argent et d'or : traditionnellement, environ la moitié des candidats reçoivent une médaille, et parmi les médaillés, un sixième reçoit l'or, un tiers l'argent, et la moitié le bronze. Malgré tout, cette règle est toujours sujette à débat car il est impossible de respecter exactement les proportions puisque l'on se voit mal couper un élève en douze. La question est encore plus épineuse lorsqu'il s'agit de couper (ou plutôt de ne pas couper) les points.

Pendant ce temps, la belle vie Pendant les jours de coordination, les candidats ont diverses activités prévues, et notamment des excursions organisées pour visiter le pays d'accueil. Bien entendu, la qualité et l'intérêt de ces excursions varie fortement d'une année sur l'autre, mais je dois dire que j'ai trouvé celles de cette année vraiment bien (les adjoints et leurs observateurs font généralement les mêmes sorties, mais pas aux mêmes dates) : nous avons visité le musée d'ethnologie qui retrace très fidèlement la vie de nombreuses minorités au Vietnam, le temple de la Littérature qui est un ancien temple reconverti en université, le village de Van Phuc spécialisé dans la fabrication et la vente de soie puis finalement la fameuse baie d'Halong. En plus de cela, il est toujours possible de profiter des activités de temps libre déjà mentionnées précédemment, et il peut aussi être organisé des soirées ou d'autres rendez-vous (par exemple compétitions sportives) par l'Olympiade. Pendant tout ce temps, séparés de leurs accompagnateurs, les candidats sont surveillés par leurs guides respectifs.



La baie d'Halong



Et nos élèves sur le bateau

Certaines années, mais ce n'était pas le cas à Hanoï, l'Olympiade met en place un système d'affichage qui permet d'informer les élèves de leurs résultats au fur et à mesure des coordinations. Si ce n'est pas le cas, les pressés ont toujours la possibilité d'accéder au site de Mathlinks¹ (<http://www.mathlinks.ro/>) où les résultats sont mis à jour très rapidement.

1. Nous vous conseillons d'ailleurs de fréquenter ce site, et notamment son forum qui voit défiler chaque jour un nombre considérable d'exercices d'entraînement.

Avant de deschampter Après la coordination, les chefs de délégation, les adjoints et leurs observateurs éventuels quittent à nouveau leur hôtel pour rejoindre celui des candidats (ou si ce n'est pas le même, un hôtel dans la même ville). Ils peuvent alors retrouver leurs élèves, et les féliciter ou les réprimander selon le cas. Ce moment est toujours attendu avec une certaine angoisse par les petits français, tant il est connu que les félicitations de Claude Deschamps sont bien plus rares que les engueulades. Malgré tout, ne vous inquiétez pas trop : il met rarement ses menaces à exécution (pour l'instant aucun élève n'est rentré à la nage) et, à la rentrée prochaine, il n'y paraîtra plus.

C'est également à ce moment que les encadrants rendent aux élèves leurs copies et leurs brouillons (les originaux, sans annotations). C'est ainsi d'autant plus facile pour eux de commenter leurs âneries, ou de leur expliquer comment ils auraient pu éviter de perdre bêtement un point. Finalement, les accompagnateurs remettent également à leurs candidats le fameux « diplôme » de participation à l'Olympiade.

Nos élèves ont malgré tout pu profiter de la dernière soirée pendant laquelle chaque équipe pouvait s'improviser artiste l'espace d'un instant en montant sur scène devant les autres délégations. L'équipe française a ainsi pu montrer ses talents en chansons, puisqu'elle a interprété pas moins de trois titres qui ont chacun connu un franc succès.



Rémi sur scène à la guitare

La cérémonie de clôture Traditionnellement le lendemain a lieu la cérémonie de clôture qui comme son nom l'indique clôt officiellement l'Olympiade. Lors de cette cérémonie, outre quelques discours d'importantes personnalités, on peut assister à la remise des médailles. Bien que ceci soit réalisé à un rythme assez rapide, la remise de toutes les médailles prend encore un certain temps puisqu'il ne faut pas oublier qu'en moyenne deux cent cinquante lauréats en reçoivent une. Souvent encore, un petit spectacle termine la cérémonie, après quoi il est organisé une séance de photos puis un buffet où chacun peut manger et se divertir comme il l'entend. (Cette année, le buffet était toutefois sous-dimensionné de sorte qu'il n'était pas si facile de trouver une place à une table, ni d'ailleurs de la nourriture en quantité suffisante.)

En fin de soirée, chacun est reconduit à son hôtel en attendant le grand départ qui, selon les horaires des avions, a lieu le lendemain ou le jour suivant.



Nos chefs ont réussi à trouver une place assise au banquet final

Le retour L'organisation de l'Olympiade prend encore en charge le transport des hôtels à l'aéroport qui se fait en règle générale par bus. Cette année, une fois arrivés à l'aéroport, notre guide est encore restée avec nous un bon moment, mais d'après ce que je comprends, ce n'est pas une règle absolue.

Pour simplifier la fin, disons simplement qu'une fois enregistré, on embarque, on s'endort puis on se réveille à Paris... mais quiconque est déjà monté dans un avion (surtout pour un vol international) sait bien que c'est infiniment plus complexe.

2 Sujets des OIM 2007

Exercice 1. Soient n nombres réels a_1, a_2, \dots, a_n . Pour chaque i ($1 \leq i \leq n$) on définit

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leq j \leq i\} - \min\{a_j : i \leq j \leq n\}$$

et on pose

$$d = \max\{d_i : 1 \leq i \leq n\}.$$

(a) Montrer que pour tous nombres réels $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq \frac{d}{2}. \quad (\text{IV.1})$$

(b) Montrer qu'il existe des nombres réels $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ tels que (IV.1) soit une égalité.

Exercice 2. On donne cinq points A, B, C, D et E tels que $ABCD$ soit un parallélogramme et $BCED$ un quadrilatère convexe, inscriptible. Soit ℓ une droite passant par A . On suppose que ℓ coupe l'intérieur du segment $[DC]$ en F et coupe la droite (BC) en G . On suppose aussi que $EF = EG = EC$. Montrer que ℓ est la bissectrice de l'angle \widehat{DAB} .

Exercice 3. Dans une compétition mathématique certains participants sont des amis. L'amitié est toujours réciproque. Un groupe de participants est appelé une *clique* si toute paire d'entre eux est formée de deux amis. (En particulier, chaque groupe d'au plus un participant constitue une clique.) Le nombre de participants dans une clique est appelé sa *taille*.

On suppose que, dans cette compétition, la plus grande taille des cliques est paire. Montrer que les participants peuvent être répartis dans deux pièces de telle sorte que la plus grande taille des cliques contenues dans une de ces pièces soit égale à la plus grande taille des cliques contenues dans l'autre.

Exercice 4. Dans un triangle ABC la bissectrice de l'angle \widehat{BCA} recoupe le cercle circonscrit en R , coupe la médiatrice de $[BC]$ en P et la médiatrice de $[AC]$ en Q . Le milieu de $[BC]$ est K et le milieu de $[AC]$ est L . Montrer que les triangles RPK et RQL ont la même aire.

Exercice 5. Soit a et b deux entiers strictement positifs. Montrer que si $4ab - 1$ divise $(4a^2 - 1)^2$, alors $a = b$.

Exercice 6. Soit n un entier strictement positif. Dans l'espace on considère l'ensemble

$$S = \{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\},$$

constitué de $(n+1)^3 - 1$ points. Trouver le plus petit nombre de plans dont la réunion contient S mais de contient pas $(0, 0, 0)$.

3 Sujets des OIM 2006

Exercice 1. Soit ABC un triangle. On appelle I le centre de son cercle inscrit. Soit un point P à l'intérieur du triangle qui vérifie :

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Montrer que $AP \geq AI$, avec égalité si et seulement si $P = I$.

Exercice 2. Soit P un polygone régulier à 2006 côtés. On dit qu'une diagonale de P est *bonne* si ses extrémités partagent le contour de P en deux parties qui comportent chacune un nombre impair de côtés. Les côtés de P sont également considérés comme bons. On appelle *bon* triangle un triangle isocèle dont deux côtés sont bons. On suppose que P est découpé en triangles par 2003 diagonales, deux à deux non sécantes à l'intérieur de P . Trouver le nombre maximal de bons triangles qui peuvent apparaître dans une telle configuration.

Exercice 3. Trouver le plus petit réel M tel que l'inégalité

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

soit vérifiée pour tous les réels a, b, c .

Exercice 4. Trouver tous les couples d'entiers (x, y) qui vérifient

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

Exercice 5. Soit P un polynôme à coefficients entiers de degré $n > 1$, et k un entier naturel. On définit le polynôme Q par $Q(x) = P(P(\dots P(P(x)) \dots))$, où P apparaît k fois. Montrer qu'il existe au plus n entiers t tels que $Q(t) = t$.

Exercice 6. À chaque côté b d'un polygone convexe P , on associe l'aire maximum d'un triangle de côté b contenu dans P . Montrer que la somme des aires associées aux côtés de P est supérieure ou égale à deux fois l'aire de P .