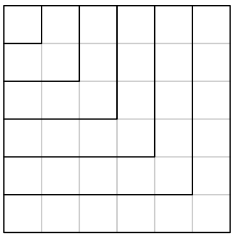
Sommes de nombres entiers

Sandrine Caruso

10 novembre 2008

1 Somme des premiers nombres impairs

Exercice 1. À l'aide du dessin ci-dessous, saurais-tu dire (sans calcul ou presque) combien vaut $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$?



En utilisant la même méthode, combien vaut $1 + 3 + 5 + \cdots + 2007 + 2009$?

2 Somme des premiers entiers

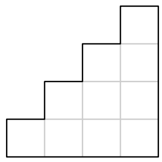
Exercice 2. Un jour, pour occuper pendant un bon moment une classe un peu agitée, un instituteur demanda à ses écoliers de calculer $1+2+3+\cdots+99+100$. Dans cette classe, se trouvait Karl-Friedrich Gauss, qui deviendra l'un des plus grands mathématiciens de l'histoire. À sept ans, il était déjà très futé, et donna la réponse en moins d'une minute, ce qui impressionna beaucoup son professeur ! Voici comment il avait procédé. Il avait écrit deux fois la somme à calculer, de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccccccccc} & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & 99 & + & 100 \\ + & 100 & + & 99 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

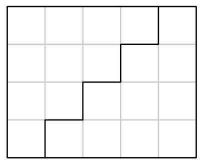
À quoi sont égales les sommes colonne par colonne ? En déduire la somme totale, puis le résultat.

En utilisant le même procédé, calcule $1 + 2 + 3 + \cdots + 2008$.

Exercice 3. Voici une manière plus « géométrique » de retrouver le résultat précédent. Sur la figure ci-dessous, il y a $1+2+3+4$ carreaux :



Combien de carreaux y a-t-il dans le rectangle ci-dessous ? En déduire sans calcul la somme $1+2+3+4$.



Calculer par la même méthode $1+2+\cdots+99+100$ et $1+2+\cdots+2007+2008$, et comparer avec les résultats obtenus à l'exercice précédent.

Exercice 4. En t'inspirant de l'un de deux exercices précédents, donne une formule générale pour calculer $1+2+3+\cdots+n$.

Exercice 5. Voici une méthode pour retrouver la formule générale. On cherche a et b tels que $an^2+bn = 1+2+\cdots+n$.

1. Si a et b vérifient l'égalité ci-dessus, combien vaut $a(n+1)^2+b(n+1)-(an^2+bn)$?
2. En déduire la valeur de a, puis celle de b. *(attention : a et b ne doivent pas dépendre de n).*

Comparer la formule obtenue avec celle de l'exercice précédent.

3 Sommes des premiers carrés, des premiers cubes

Exercice 6. Nous allons nous inspirer de l'exercice 5 pour calculer la somme des premiers carrés $1+4+9+\cdots+n^2$ et celle des premiers cubes $1+8+27+\cdots+n^3$.

1. Chercher $1+4+9+\cdots+n^2$ sous la forme an^3+bn^2+cn.
2. Chercher $1+8+27+\cdots+n^3$ sous la forme $an^4+bn^3+cn^2+dn$.