

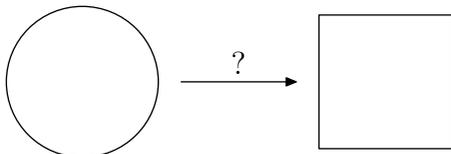
Constructions à la règle et au compas

Sandrine Caruso

13 novembre 2008

1 Aperçu historique

Dans l'histoire des mathématiques, la règle (non graduée !) et le compas ont longtemps joué un rôle privilégié. Les mathématiciens de la Grèce antique croyaient que toute construction géométrique pouvait se faire uniquement à l'aide de ces deux instruments. Pourtant, certains problèmes leur ont résisté, et il fallut de nombreux siècles avant que l'on démontre qu'ils étaient tout simplement impossibles. Le plus célèbre d'entre eux est connu sous le nom de *quadrature du cercle*. Il s'agit de construire un carré ayant la même aire qu'un cercle donné.



Question 1. Au fait, si le rayon du cercle est égal à 1, quelle doit être la longueur du côté du carré pour qu'ils aient la même aire ?

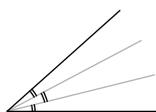
Deux autres problèmes très célèbres sont la *duplication du cube* et la *trisection de l'angle*. La duplication du cube consiste à construire un cube de volume deux fois plus grand que celui d'un cube donné.

Question 2. Si le cube de départ est de côté de longueur 1, quelle doit être la longueur du côté du cube de volume double ?

Exercice 3. Étant donné un carré, comment construirais-tu, à la règle et au compas, un carré d'aire double ?

Ainsi, la « duplication du carré » est possible à la règle et au compas, mais la « duplication du cube » ne l'est pas.

La trisection de l'angle consiste à construire deux demi-droites séparant un angle en trois angles de même mesure.



Exercice 4. Comment construire la bissectrice d'un angle à la règle et au compas ?

Exercice 5. Saurais-tu couper un segment en trois segments de longueur égale à la règle et au compas ?

Il est possible de construire la bissectrice de n'importe quel angle à la règle et au compas, et également de couper un segment en trois parties égales. Pourtant, on ne peut pas, en général, séparer un angle en trois angles égaux uniquement à la règle et au compas !

2 Opérations algébriques

Exercice 6. Supposons que l'on sait construire un segment de longueur a et un segment de longueur b . Comment construire un segment de longueur $a + b$? Un segment de longueur $|a - b|$?

($|x|$ désigne la valeur absolue de x : $|x| = x$ si x est positif et $|x| = -x$ si x est négatif.)

Exercice 7. Supposons que l'on sait construire un segment de longueur a et un segment de longueur b . Comment construire un segment de longueur $a \times b$? Comment construire un segment de longueur $1/a$ (si a est non nul) ? En déduire comment construire un segment de longueur b/a .

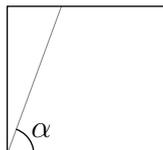
Exercice 8. Supposons que l'on sait construire un segment de longueur a . Comment construire un segment de longueur \sqrt{a} ?

3 Constructions par pliage

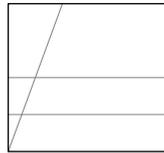
Pour pouvoir réaliser certaines constructions impossibles à la règle et au compas, on peut utiliser d'autres outils ou d'autres techniques. L'une d'entre elles est la construction par pliage.

Voici comment réaliser la trisection d'un angle quelconque par pliage (ici on va supposer que l'angle est aigu, mais on pourrait trisecter un angle obtus par une méthode analogue).

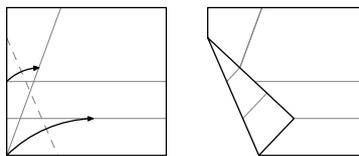
Étape 1. Prend une feuille rectangulaire, et marque un pli faisant un angle α avec le bord inférieur.



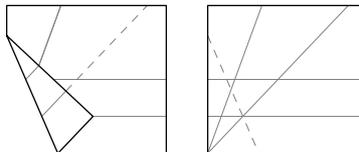
Étape 2. Marque deux plis parallèles au bord inférieur, de sorte que le premier soit à égale distance du bord et de l'autre.



Étape 3. C'est l'étape la plus délicate. Amène, comme sur la figure ci-dessous, simultanément le coin en bas à gauche sur le premier pli parallèle, et l'extrémité gauche du deuxième pli parallèle sur le pli à angle α .



Étape 4. Complète, comme sur la figure, le pli formé par la première parallèle sur la partie repliée. Puis déplie et complète à nouveau le pli que tu viens d'effectuer. Normalement, il doit passer par le coin en bas à gauche.



L'angle formé par le dernier pli vaut $2\alpha/3$ (et donc l'angle entre le premier et le dernier pli vaut $\alpha/3$). Ainsi, on a réussi à construire, par pliage, le trisecté de l'angle α .

Question 9. Pourquoi le dernier pli passe-t-il par le coin en bas à gauche ?

Exercice 10. Saurais-tu démontrer que cette construction réalise bien la trisection de l'angle ?

Exercice 11 (très difficile !). Il est également possible de réaliser la duplication du cube par pliage (c'est-à-dire, si on a la longueur d'un cube, on peut construire la longueur du côté du cube de volume double, calculée à la question 2). Essaie de trouver une telle construction.