Fractions continues

Sandrine Caruso

7 mars 2009

1 Les fractions continues

On considère un nombre réel, que l'on note x. On note $[x]$ sa *partie entière* (c'est-à-dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x ; pour un nombre **positif**, il s'agit de la partie « avant la virgule ». Attention au cas des nombres négatifs !). Par exemple, $[3] = 3$, $[4{,}6] = 4$, $[-2] = -2$ et $[-2{,}3] = -3$. On note $\{x\}$ sa *partie décimale*, c'est-à-dire $\{x\} = x - [x]$ (pour un nombre **positif**, c'est la partie « après la virgule »). Par exemple, $\{3\} = 0$, $\{3.4\} = 0.4$, $\{-2.3\} = 0.7$. Alors $\{x\}$ est un nombre réel, supérieur ou égal à 0, et strictement plus petit que 1 (**Pourquoi ?**).

Intéressons-nous de plus près à ce nombre $\{x\}$. S'il est nul, cela signifie que le nombre x est entier. Sinon, on pose $x_1 = \frac{1}{\{x\}}$, et alors, $x_1 > 1$. On pose aussi $n_0 = [x]$, de sorte que $x = n_0 + \frac{1}{x_1}$. Puis, à son tour, on écrit $x_1 = [x_1] + \{x_1\}$, on pose $n_1 = [x_1]$, et on s'occupe du nombre $\{x_1\}$. S'il est nul, cela veut dire que x_1 est entier, et dans ce cas, $x = n_0 + \frac{1}{n_1}$. Sinon, on pose $x_2 = \frac{1}{\{x_1\}}$, et on recommence ainsi de suite.

De cette manière, on obtient des nombres entiers $n_0, n_1, n_2, \cdots$, et on peut écrire

$$x = n_0 + \frac{1}{x_1} = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{x_2}} = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

Si, au bout d'un moment, on obtient un nombre $\{x_i\}$ qui est nul, alors on s'arrête. Mais il arrive (souvent) que l'on ne puisse pas s'arrêter, comme on le verra par la suite !

Exemple 1. Pour bien comprendre ce que l'on fait, prenons l'exemple du nombre π. Comme tu le sais, $\pi \simeq 3{,}14\cdots$. Par conséquent, $[\pi] = 3$. Bon, on a donc $n_0 = 3$ dans ce cas. Et $\{\pi\} = \pi - 3 \simeq 0{,}14\cdots$. À l'aide de ta calculatrice, vérifie que $\frac{1}{\pi-3} \simeq 7{,}06\cdots$. On a donc $n_1 = 7$. En continuant de même, on obtient :

$$\pi \simeq 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}.$$

Retrouve ces résultats ($n_0 = 3, n_1 = 7, n_2 = 15, n_3 = 1$), et trouve encore n_4 et n_5.

Exercice 2. En « coupant » la fraction ci-dessus après n_1, on obtient $3 + \frac{1}{7}$. Réduis au même dénominateur. La fraction obtenue te rappelle-t-elle quelque chose ?

Exercice 3. Que peux-tu dire d'un nombre x dont le développement en fraction continue s'arrête au bout d'un moment ? (C'est-à-dire qu'au bout d'un moment, un $\{x_i\}$ sera nul.)

Connais-tu des nombres qui ne sont pas de ce type-là ?

Tout comme les écritures du type $3{,}14$, $3{,}141$, $3{,}1415$, sont des approximations décimales de plus en plus précises d'un nombre (en l'occurrence, du nombre π), les fractions continues « coupées » 3, $3+\frac{1}{7}$, $3+\frac{1}{7+1/15}$, etc... sont des approximations fractionnaires de plus en plus précises d'un nombre (ici également, du nombre π). On appelle ces fractions continues « coupées » des *réduites*.

2 Les solutions d'équations de degré 2

2.1 Premiers exemples : $\sqrt{p^2+1}$

Une *équation de degré 2* est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des nombres réels fixés (positifs ou négatifs, a étant non nul[1]), que l'on appelle les *coefficients* de l'équation, et où x est l'inconnue. Tu sais résoudre certaines de ces équations. Par exemple, les équations du type $x^2 + 2sx + s^2 = 0$, où s est un réel (positif ou négatif) fixé, ou encore $x^2 - c = 0$ où c est un nombre positif[2].

Dans cette partie, on s'intéressera uniquement à des cas où les coefficients a, b et c sont *entiers* (positifs ou négatifs).

Exercice 4. Quelles sont les solutions de l'équation $x^2 - 2 = 0$? Écris le début de leur développement en fraction continue. Remarques-tu quelque chose ? À ton avis, quelle sera la suite du développement ?

Mêmes questions avec l'équation $x^2 - 6 = 0$.

Exercice 5. Soit p un nombre entier positif fixé. On considère l'équation $x^2 - (p^2+1) = 0$. Quelles sont ses solutions ? On va essayer de trouver le développement en fraction continue de la solution positive, que l'on note x.

1. L'équation peut s'écrire aussi $x^2 - p^2 = 1$. Factorise le terme de gauche.
2. Tu as obtenu deux facteurs. Quel est le plus grand des deux ? Peut-il être nul ? Divise par ce facteur des deux côtés de l'égalité.
3. Maintenant, ajoute un nombre des deux côtés de l'égalité, de manière à ne laisser que x, tout seul, à gauche.
4. Le nombre x apparaît également dans l'expression de droite. Remplace cette occurrence de x par toute l'expression de droite... Et recommence... Quelle fraction continue obtiendras-tu ainsi ?

Déduis de cela le développement en fraction continue de $\sqrt{p^2+1}$. Comment trouver celui de $-\sqrt{p^2+1}$?

En remarquant que $2 = 1^2 + 1$, retrouve les résultats du début de l'exercice 4. Trouve le développement en fraction continue de $\sqrt{5}$.

[1] Si a est nul, ce n'est plus une équation de degré 2 : c'est une équation de degré 1.

[2] En fait, si le nombre est strictement négatif, tu sais résoudre aussi : il n'y a pas de solution !

2.2 Autres racines carrées d'entiers

Exemple 6. Voici une technique pour calculer le développement en fraction continue de $\sqrt{6}$ (sans calculatrice !). Tout d'abord, on détermine la partie entière de $\sqrt{6}$. Comme $4 < 6 < 9$, cette partie entière est 2. La technique pour construire le développement en fraction continue va être de faire apparaître « artificiellement » des termes qu'on a *envie* de faire apparaître. La clé va être l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, que l'on a déjà utilisée à l'exercice précédent.

$$\begin{aligned}\sqrt{6} = \sqrt{6} - 2 + 2 = 2 + \frac{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}{\sqrt{6}+2} = 2 + \frac{6-4}{\sqrt{6}+2} \\ = 2 + \frac{2}{\sqrt{6}+2} = 2 + \frac{1}{\frac{\sqrt{6}+2}{2}}.\end{aligned}$$

Petite explication sur le calcul que je viens de faire :

- Je fais apparaître la partie entière de $\sqrt{6}$, c'est-à-dire 2.
- Ce qui reste, $\sqrt{6} - 2$, je commence par l'écrire sous la forme $\frac{m}{z}$, où m est un entier. Pour ça, je remarque que $(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)$ est un nombre entier grâce à l'identité remarquable. Alors $m = (\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2) = 2$ et $z = \sqrt{6}+2$ me donnent bien la forme que je voulais.
- Enfin, j'écris $\frac{2}{\sqrt{6}+2}$ sous la forme $\frac{1}{z'}$, et $z' = \frac{\sqrt{6}+2}{2}$ est un nombre qui n'a « pas de racine carrée au dénominateur ».

Puis, on traite de la même manière le nombre $\frac{\sqrt{6}+2}{2} = 1 + \sqrt{3/2}$. On a $1 < \frac{3}{2} < 4$, donc la partie entière de $\sqrt{3/2}$ est 1, et la partie entière de $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$ est 2.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{6}+2}{2} = \frac{\sqrt{6}+2}{2} - 2 + 2 = 2 + \frac{\sqrt{6}-2}{2} = 2 + \frac{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}{2(\sqrt{6}+2)} \\ = 2 + \frac{6-4}{2(\sqrt{6}+2)} = 2 + \frac{2}{2(\sqrt{6}+2)} = 2 + \frac{1}{\sqrt{6}+2}.\end{aligned}$$

En rassemblant les deux égalités, on obtient

$$\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\sqrt{6}}}.$$

Il reste alors à remplacer le $\sqrt{6}$ dans l'expression de droite par toute cette expression, ce qui donne

$$\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \left(2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\sqrt{6}}}\right)}} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2+\sqrt{6}}}}},$$

puis on recommence. On trouve donc

$$\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}}$$

où les deux termes 2 et 4 vont se répéter jusqu'à l'infini.

Exercice 7. En t'inspirant de l'exemple de $\sqrt{6}$, trouve le développement en fraction continue de $\sqrt{3}$.

2.3 Autres solutions d'équations de degré 2

On vient de voir des exemples de développement en fraction continue de $\sqrt{n}$, où n est un nombre entier. Mais les solutions d'équations du second degré ne sont pas toutes de cette forme-là !

Exercice 8. Vérifie que les nombres $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont tous les deux solutions de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Exercice 9. On va noter $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Ce nombre est connu des mathématiciens sous le nom de *nombre d'or*[3]. On va trouver son développement en fraction continue en utilisant le fait que $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. En effet, cela donne aussi $\varphi^2 = \varphi + 1$.

1. Qu'obtient-on en divisant par φ des deux côtés de l'égalité ?
2. En remplaçant le φ de droite par toute l'expression, technique que l'on a déjà utilisée à plusieurs reprises, et en recommençant à l'infini, on trouve le développement en fraction continue de φ. Quel est-il ?

2.4 Développement périodique

Tous les exemples de solutions d'équations de degré 2 que nous avons vus ont un point commun : le développement en fraction continue que nous avons calculé « se repète » au bout d'un certain temps : dans l'exemple de $\sqrt{2}$, au bout d'un moment, les entiers n_i sont tous égaux à 2. Plus généralement, pour $\sqrt{p^2+1}$, au bout d'un moment ils sont tous égaux à $2p$. Dans l'exemple de $\sqrt{6}$, au bout d'un moment, ils alternent entre 2 et 4, et dans l'exemple de $\sqrt{3}$, entre 1 et 2. Enfin, dans l'exemple de φ, ils sont tous égaux à 1.

Lorsque la suite des nombres n_i se répète ainsi au bout d'un moment, on dit que le développement est *périodique*. Les développements de $\sqrt{p^2+1}$ et de φ sont périodiques de *période* 1 car il y a un seul nombre qui se répète. Les développement de $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont de *période* 2 car c'est une suite de deux nombres qui se répète. On peut trouver des exemples de développements de période 3, 4, 5, ou n'importe quel autre entier... Ainsi,

[3]Si tu veux en savoir plus sur ce nombre, tu peux par exemple taper « nombre d'or » dans ton moteur de recherche préféré...

le développement de $\sqrt{7}$ est de période 4, car la suite $(1, 1, 1, 4)$ se répète au bout d'un moment. Le nombre $\frac{2+\sqrt{10}}{3}$, qui est solution de l'équation $3x^2 - 4x - 2$, est de période 3 car la suite $(1, 1, 2)$ se répète.

En fait, *tous* les nombres qui sont solution d'une équation de degré 2 à coefficients entiers, mais pas d'une équation de degré 1[4], ont un développement en fraction continue périodique ! Pour le trouver, on peut utiliser la même méthode que celle que j'ai présentée pour $\sqrt{6}$. Mais plus la période est longue, plus la méthode est longue ! Précisément, pour $\sqrt{6}$, il y avait deux étapes : une qui consistait à faire des manipulations à partir de $\sqrt{6}$, et une qui consistait à faire des manipulation à partir de $\frac{\sqrt{6}+2}{2}$. Lorsque la période est n, il faut faire n étapes ! (Tu peux essayer avec $\sqrt{7}$ ou $\frac{2+\sqrt{10}}{3}$ si tu veux.)

Réciproquement, *tous* les nombres qui ont un développement en fraction continue périodique sont solutions d'une équation de degré 2. Voyons, à l'aide de quelques exemples, comment on pourrait le démontrer.

Exemple 10. Supposons qu'un nombre x s'écrive

$$x = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}$$

où le nombre 2 se répète. Rappelle-toi comment on avait obtenu la plupart des développements en fraction continue : on avait un nombre, que l'on exprimait en fonction de lui-même à l'aide d'une expression fractionnaire, et on le remplaçait dans cette expression par l'expression toute entière, puis on recommençait. Là, on va utiliser l'astuce inverse : on a une fraction continue qui est périodique. Cela signifie que l'on retrouve la fraction continue « à l'intérieur d'elle-même » : dans notre cas, on a

$$2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}} = 2 + \frac{1}{x}$$

autrement dit,

$$x = 2 + \frac{1}{x}.$$

Maintenant, en multipliant des deux côtés par x, on obtient $x^2 = 2x + 1$, ou encore $x^2 - 2x - 1 = 0$. Notre nombre x est bien racine d'une équation de degré 2 à coefficients entiers !

Exemple 11. Mais on n'est pas toujours dans un cas aussi simple. Par exemple, il se peut que le développement ne soit pas périodique *dès le début*. C'est d'ailleurs ce qui se passe dans la plupart des cas (parmi nos exemples, $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ ou $\sqrt{3}$ n'avaient pas un développement périodique depuis le début). Il faut alors commencer par faire quelques

[4]C'est-à-dire qui ne sont pas des nombres rationnels : les nombres rationnels ont un développement en fraction continue qui s'arrête.

manipulations supplémentaires. Par exemple, supposons que le nombre y s'écrive

$$y = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}}}$$

où ensuite, le nombre 2 se répète. On commence par se ramener à un nombre dont le développement est périodique *depuis le début* : on soustrait 3 des deux côtés, on prend l'inverse, puis on soustrait 1 au résultat, et on prend encore l'inverse, ce qui donne

$$\cfrac{1}{\cfrac{1}{y-3} - 1} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots}}.$$

Puis on fait comme dans l'exemple précédent, mais en remplaçant x par $\frac{1}{\frac{1}{y-3}-1}$:

$$\cfrac{1}{\cfrac{1}{y-3} - 1} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{1}{y-3} - 1}} = 2 + \left(\frac{1}{y-3} - 1\right) = 1 + \frac{1}{y-3},$$

en on continue en faisant des réductions au même dénominateur. Tu peux vérifier que le nombre y obtenu est solution de l'équation $2y^2 - 12y + 17 = 0$.

Lorsque la période est plus grande, là encore, c'est plus long, mais en utilisant la même astuce et en réduisant de proche en proche au même dénominateur, on obtient encore une équation de degré 2.

Exercice 12. Trouve une équation de degré 2 dont le nombre

$$x = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

est solution.

3 Retour sur le nombre d'or

Comme je l'ai dit dans la première partie, les *réduites* d'un nombre x (c'est-à-dire les fractions continues « tronquées ») sont des approximations de x, qui sont de plus en plus proches de x. On peut s'approcher d'aussi près que l'on veut de x, pourvu que l'on s'arrête suffisamment loin dans le développement. Dans cette partie, nous allons étudier plus précisément les réduites du nombre d'or.

3.1 Suite de Fibonacci

En mathématiques, ce que l'on appelle une *suite*, c'est la donnée de nombres u_0, u_1, u_2, ... associés à chacun des entiers $0, 1, 2, \ldots$, ce que l'on note de manière plus courte $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, l'indice « $n \in \mathbb{N}$ » voulant dire que n parcourt tous les entiers naturels. On utilisera parfois l'indice « $n \in \mathbb{N}^*$ » qui signifie que la suite commence à l'indice 1. Pour se donner une suite quelconque, il faudrait donc pouvoir se donner une infinité de nombres, ce qui, en général, n'est pas possible. Cependant, certaines suites peuvent être définies par des formules. Cela peut être des formules directes ; par exemple, $(2n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$, ou $(\pi)_{n\in\mathbb{N}}$, sont des suites. Ce sont, respectivement, les suites $(0, 2, 4, 6, \ldots)$, $(0, 1, 4, 9, \ldots)$, $(\pi, \pi, \pi, \ldots)$. Il y a aussi un autre moyen de définir une suite, qui s'appelle la définition par *récurrence*. Cela signifie que l'on se donne seulement les premiers termes de la suite (souvent le premier, parfois les deux premiers, mais on peut avoir besoin d'en fixer plus), et que l'on a ensuite une formule qui permet d'exprimer un terme en fonction des précédents. Voici quelques exemples :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$$

On connaît u_0, et on sait calculer chaque terme de la suite en fonction du précédent : on peut donc calculer $u_1 = u_0^2 = 4$, $u_2 = u_1^2 = 16$, $u_3 = u_2^2 = 256$, etc...

Il est aussi possible que u_{n+1} dépende à la fois de u_n et de n. Exemple : $u_0 = 1$, $u_{n+1} = (n+1)u_n$. On a alors $u_1 = 1 \times u_0 = 1$, $u_2 = 2 \times u_1 = 2$, $u_3 = 3 \times u_2 = 6, \ldots$ (En fait, on peut remarquer que, dans ce cas, $u_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$. On note ce nombre $n!$, et on lit « factorielle n ».)

La suite à laquelle nous allons nous intéresser est appelée *suite de Fibonacci*, du nom, ou pour être plus exacte, du surnom, d'un mathématicien italien des XII-ième et XIII-ième siècles, qui est le premier à avoir étudié cette suite. Elle a de nombreuses applications en mathématiques. Nous allons voir qu'elle est reliée au nombre d'or *via* la théorie des fractions continues. Nous allons noter cette suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est une suite définie par récurrence. Nous allons exprimer chaque terme de la suite en fonction des *deux* termes précédents, et du coup, nous avons besoin de nous fixer les *deux* premiers termes de la suite. Voici la définition.

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \end{cases}$$

Calculons, pour voir, quelques termes. On a $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$, $F_3 = F_2 + F_2 = 1 + 1 = 2$, $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$, $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$...

Exercice 13. Calcule F_6, F_7 et F_8.

3.2 Les réduites du nombre d'or

Revenons au nombre d'or et à ses réduites. Le développement en fraction continue du nombre d'or, que tu as du trouver à la partie précédente, est

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}$$

Les réduites du nombre d'or sont les fractions que l'on obtient en tronquant :

$$1, \quad 1 + \frac{1}{1}, \quad 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}, \cdots$$

Exercice 14. Mets les réduites successives sous forme d'une fraction $\frac{p}{q}$ (p et q entiers). Tu peux par exemple faire ça avec les 5 ou 6 premières réduites. Que constates-tu ? À ton avis, à quoi est égale la n-ième réduite ?

Exercice 15. Nous allons essayer de démontrer l'hypothèse que tu as faite à l'exercice précédent. On suppose que la n-ième réduite s'écrit sous forme d'une fraction (irréductible) $\frac{p_n}{q_n}$.

1. Que valent p_1 et q_1 ? p_2 et q_2 ?
2. Que vaut la fraction $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ en fonction de la fraction $\frac{p_n}{q_n}$?
3. On va admettre que, en réduisant « bêtement » au même dénominateur, la fraction obtenue est encore irréductible. (As-tu une idée de la raison pour laquelle il en est ainsi ?) À quoi est égal q_{n+1} en fonction de p_n ? Déduis-en une relation de récurrence vérifiée par la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. À quoi est égale la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Et la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$? Est-ce bien l'hypothèse que tu avais faite à la question précédente ?