Feuille de TD n°6

Exercice 1. Soient p et q deux entiers écrits en base 2. On suppose que q est impair et au moins égal à 3. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation : $u := p, v := q$

Si u est pair, $u := u/2$

Si u est impair et $u > v$, $u := (u - v)/2$

Si u est impair et $u < v$, $w := v, v := u, u := (w - u)/2$

Si $u = v$, retourner u

---

1. Montrer que cet algorithme calcule le Pgcd de p et q.

2. Comment s'implémentent le test « est pair » (resp. « est impair ») et la division par 2 pour des nombres écrits en binaire ?

3. Comment compléter cet algorithme pour qu'il traite deux entiers binaires quelconques ?

4. Appliquer l'algorithme complété à 1011010 et 100010 en détaillant les étapes.

5. Convertissez les nombres ci-dessus et le résultat en base 10 et vérifiez qu'il s'agit bien de leur Pgcd.

Exercice 2 (Fraction continue)**.** On considère l'algorithme suivant, appelé algorithme de développement en fraction continue. Étant donné un nombre réel x, on calcule sa partie entière $n_0 = \lfloor x \rfloor$, puis on pose, si $x \neq n_0$, $x_1 = \frac{1}{x - n_0}$, ce qui permet d'écrire

$$x = n_0 + \frac{1}{x_1}.$$

On recommence le même processus avec x_1 en calculant sa partie entière $n_1 = \lfloor x_1 \rfloor$ puis $x_2 = \frac{1}{x_1 - n_1}$, et ainsi de suite. Si l'on aboutit à $n_i = x_i$, on s'arrête, sinon on continue indéfiniment. On écrit ainsi x sous la forme d'une fraction « continue »

$$x = n_0 + \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}.$$

On note en abrégé $x = [n_0, n_1, n_2, \ldots]$.

1. Montrer que le développement en fraction continue de x est finie si et seulement si x est un nombre rationnel.

2. Déterminer le début du développement en fraction continue de π, ainsi que les développements de $\frac{22}{7}$, $\sqrt{2}$, et de la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

3. Soit p un entier strictement positif. Déterminer le développement en fraction continue de $\sqrt{p^2 + 1}$.

On définit par récurrence les deux suites (p_n) et (q_n) par $p_{-1} = 1$, $q_{-1} = 0$, $p_0 = n_0$, $q_0 = 1$ et pour $i \geqslant 1$,

$$\begin{cases} p_i = n_i p_{i-1} + p_{i-2} \\ q_i = n_i q_{i-1} + q_{i-2} \end{cases}$$

4. Montrer que pour tout i, $[n_0, n_1, \ldots, n_i] = \frac{p_i}{q_i}$. Montrer que, pour un nombre réel y, $[n_0, n_1, \ldots, n_i, y] = \frac{yp_i + p_{i-1}}{yq_i + q_{i-1}}$.

5. Montrer que pour tout i, $p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i = (-1)^{i+1}$ et en déduire que

$$[n_0, n_1, \ldots, n_i] - [n_0, n_1, \ldots, n_{i-1}] = \frac{(-1)^{i+1}}{q_i q_{i-1}}.$$

6. On admet[1] que $x = [n_0, n_1, n_2, \ldots]$ est compris entre $[n_0, \ldots, n_{i-1}]$ et $[n_0, \ldots, n_i]$. Montrer que

$$\left| x - \frac{p_i}{q_i} \right| \leqslant \frac{1}{q_i q_{i+1}} \leqslant \frac{1}{q_i^2}.$$

On cherche à démontrer que le développement en fraction continue d'un réel x est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si x est solution d'une équation polynomiale de degré 2 à coefficients entiers.

7. Montrer qu'un nombre dont le développement en fraction continue est périodique (depuis le début) est solution d'une équation polynomiale de degré 2 à coefficients entiers.

8. Monter que c'est également le cas d'un nombre dont le développement est périodique à partir d'un certain rang.

9. Soit x une solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si $x = [n_0, \ldots, n_i, x_{i+1}]$, montrer que x_{i+1} est solution d'une équation de degré 2 à coefficients entiers, dont on exprimera les coefficients a_{i+1}, b_{i+1} et c_{i+1} en fonction de a, b, c, et des p_j, q_j.

10. Montrer que les coefficients a_i, et c_i sont majorés indépendamment de i. Montrer que les équations $a_i X^2 + b_i X + c_i = 0$ ont toutes le même discriminant. Montrer que b_i est également majoré indépendamment de i.

11. En déduire qu'il n'y a qu'un nombre fini d'équations vérifiées par les x_i puis que le développement de x est périodique à partir d'un certain rang.

[1] Cela n'est pas difficile à montrer, n'hésitez pas à le faire si vous en avez envie.