

Feuille de TD n°7

Exercice 1. Pour calculer numériquement une valeur approchée d'une intégrale, on utilise des méthodes de la forme

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{k-1} (a_{i+1} - a_i) \sum_{j=0}^{l_i} \omega_{i,j} f(x_{i,j}), \quad (1)$$

où $a_0 = a < a_1 < \dots < a_k = b$ est une subdivision de $[a, b]$, où $x_{i,j} \in [a_i, a_{i+1}]$ et $\sum_{j=0}^{l_i} \omega_{i,j} = 1$.

1. Cas où $l_i = 0$ pour tout i (et $\omega_{i,0} = 1$). On appelle méthode des rectangles à gauche le cas où l'on choisit $x_{i,0} = a_i$, méthode des rectangles à droite le choix $x_{i,0} = a_{i+1}$, méthode du point milieu le choix $x_{i,0} = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$. Donner une interprétation graphique de ces trois méthodes et justifier leur nom.
2. Montrer que l'approximation (1) est exacte :
 - pour les fonctions constantes (ie polynomiales de degré 0) avec la méthode des rectangles à droite ou à gauche,
 - pour les fonctions linéaires (ie polynomiale de degré ≤ 1) avec la méthode du point milieu.
3. En vous inspirant de l'interprétation graphique des méthodes ci-dessus, proposez une méthode dite « méthode des trapèzes », exacte pour les fonctions linéaires. Quelles doivent être les valeurs des paramètres l_i , $\omega_{i,j}$ et $x_{i,j}$ pour une telle méthode ?
4. On suppose ici que $l_i = 2$ pour tout i , $x_{i,0} = a_i$, $x_{i,2} = a_{i+1}$ et $x_{i,1} = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}$. Déterminer la valeur des paramètres $\omega_{i,j}$ pour que la méthode soit exacte pour tous les polynômes de degré inférieur ou égal à 2 (on appelle cette méthode « méthode de Simpson »).
5. Montrer que la méthode de Simpson est même exacte pour les polynômes de degré 3.
6. Proposez une méthode de calcul approché de la fonction log utilisant des formules d'intégration numérique.

Exercice 2. On considère l'algorithme suivant :

```

1: a := 1.0, b := 1.0
2: tant que ((a + 1) - a) - 1 = 0 faire
3:   a := 2 × a
4: fin tant que
5: tant que ((a + b) - a) - b ≠ 0 faire
6:   b := b + 1
7: fin tant que
8: retourner b

```

1. Que fait à première vue cet algorithme ?
2. On l'implémente en C ; il s'arrête et renvoie 2. On l'implémente en Maple ; il s'arrête et renvoie 10. Pouvez-vous expliquer pourquoi ?