

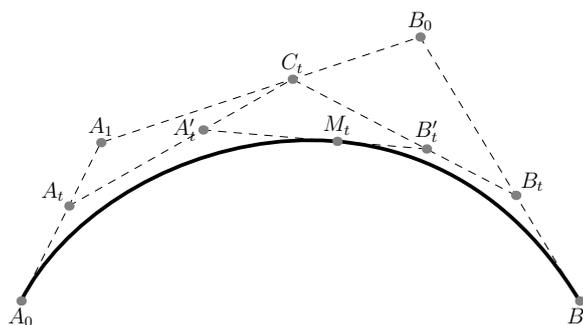
Feuille de TD n°8

Exercice 1 (Splines cubiques).

1. Soient $a \neq b \in \mathbb{R}$ et $x_a, x_b, y_a, y_b \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P de degré ≤ 3 tel que

$$\begin{aligned} P(a) &= x_a, & P'(a) &= y_a, \\ P(b) &= x_b, & P'(b) &= y_b. \end{aligned}$$

2. Soient A_0, A_1, B_0, B_1 quatre points du plan. On réalise la construction géométrique suivante. Soit $t \in [0, 1]$.
- On construit les points A_t, C_t et B_t , barycentres respectifs des points pondérés $(A_0, 1-t)$ et (A_1, t) , $(A_1, 1-t)$ et (B_0, t) , $(B_0, 1-t)$ et (B_1, t) .
 - On construit A'_t et B'_t , barycentres respectifs des points pondérés $(A_t, 1-t)$ et (C_t, t) , $(C_t, 1-t)$ et (B_t, t) .
 - Enfin, on construit le point M_t , barycentre des points pondérés $(A'_t, 1-t)$ et (B'_t, t) .
- Lorsque t parcourt $[0, 1]$, le point M_t parcourt une courbe paramétrée. Montrer que cette courbe est polynomiale de degré au plus 3, que A_0 et B_1 sont sur cette courbe, et qu'elle est tangente en A_0 (resp. B_1) à la demi-droite $[A_0, A_1)$ (resp. $[B_1, B_0)$).



3. Proposer une construction géométrique permettant de tracer le graphe du polynôme de la question 1.

Exercice 2. Soient x_0, \dots, x_{n-1} des réels distincts et y_0, \dots, y_{n-1} des réels. On rappelle que la méthode d'interpolation de Newton consiste à chercher un polynôme P vérifiant $P(x_i) = y_i$ ($i = 0, \dots, n-1$) sous la forme

$$P(X) = \lambda_0 + \lambda_1(X - x_0) + \dots + \lambda_{n-1}(X - x_0) \cdots (X - x_{n-2}).$$

1. On pose $P_1(X) = \lambda_1 + \lambda_2(X - x_1) + \dots + \lambda_{n-1}(X - x_1) \cdots (X - x_{n-2})$. Pour $i \geq 1$, calculer $P_1(x_i)$ en fonction de y_i, x_i, x_0, y_0 .
2. En déduire un procédé récursif pour déterminer les λ_i .
3. Combien d'additions ou soustractions, et combien de multiplications ou divisions, cet algorithme nécessite-t-il ?
4. Combien d'opérations faut-il ajouter si l'on veut exprimer P sous forme développée ? On pourra utiliser une forme de type Hörner pour une meilleure efficacité.