

Die erweiterte Zopfgruppe

Master-Arbeit

zur Erlangung des Grades

Master of Science (M.Sc.) im Studiengang Mathematik

am Department Mathematik der
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg

vorgelegt am Dienstag, den 6. Juli

von **Sandrine Caruso**

Inhaltsverzeichnis

1	Geometrie der affinen Weylgruppe	2
2	Präsentation des Regularorbitenraum	8
3	Präsentation der erweiterten Zopfgruppe	12
4	Eine andere Präsentation von $\pi_1(Y/W)$	16
4.1	Anhang: Berechnung der Relation $\Phi(t_i)\Phi(t_j) = \Phi(t_j)\Phi(t_i) \dots$	22

Einleitung

Es ist bekannt (siehe [4], [3] oder [1]), dass die sogenannte Zopfgruppe mit n Strängen, das heißt die Gruppe $\mathcal{B}_n = \pi_1(\{S \subset \mathbb{R}^2, |S| = n\})$, folgende Präsentation durch Erzeuger und Relationen besitzt:

$$\mathcal{B}_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1}; s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \text{ und } s_i s_j = s_j s_i \text{ für } |i - j| \geq 2 \rangle$$

wobei s_i die Kreuzung des i -ten Stranges über den $(i + 1)$ -ten darstellt (siehe Abb. 1). Unsere Ziel ist, eine analoge Präsentation der sogenannten *erweiterten Zopfgruppe* mit

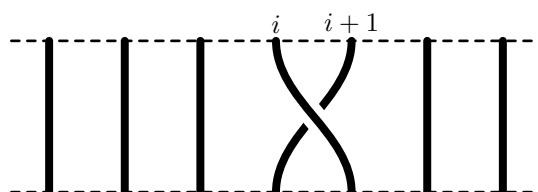


Abbildung 1: Kreuzung s_i

n Strängen zu geben. Diese Gruppe ist nach Definition $\tilde{\mathcal{B}}_n = \pi_1(\{S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n\})$. Geometrisch kann man die Elemente dieser Gruppe so beschreiben, wie ein Zopf dessen Stränge um einen Halm arrangiert sind, den sie nicht überqueren können. Wir werden beweisen, dass $\tilde{\mathcal{B}}_n$ folgende Präsentation besitzt:

$$\tilde{\mathcal{B}}_n = \langle (s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}, u; \text{ falls } n > 2, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \\ s_i s_j = s_j s_i \text{ für } i - j \neq -1, 0, 1 \text{ und } u s_i u^{-1} = s_{i-1} \rangle.$$

Diese Präsentation erhält man aus der von \mathcal{B}_n durch Hinzufügen eines Erzeugers s_0 , der der Überkreuzung der Stränge n und 1 entspricht, und eines Erzeugers u , der dem Zopf entspricht, der (zirkular) die Punkte i und $i + 1$ permutiert (siehe Abb. 5 auf Seite 15), dazu noch Relationen mit diesen neuen Erzeugern.

In der ersten Sektion erinnern wir an einige Resultate über die *affine Weylgruppe*, die in [2] gefunden werden können. In der zweiten Sektion wird der *Regularorbiterraum* eingeführt, und es wird gezeigt, dass seine Fundamentalgruppe sich präsentieren lässt durch die Erzeuger $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ und, falls $n > 2$, die Relationen $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ und $s_i s_j = s_j s_i$ für $i - j \neq -1, 0, 1$. Dies ist ein Sonderfall des Resultats, das in [4] gefunden werden kann. In der dritten Sektion wird die Präsentation von \tilde{B}_n davon deduziert. In der letzten Sektion wird auf der Fundamentalgruppe des Regularorbiterraum zurückgekommen. Wir geben davon eine zweite Präsentation, die in [3] gefunden wird.

Folgende Bezeichnungen werden benutzt: i ist eine komplexe Zahl, sodass $i^2 = -1$, für $m \leq n \in \mathbb{Z}$ ist $\llbracket m, n \rrbracket = \{m, \dots, n\}$ die Menge aller ganzen Zahlen von m bis n , und wenn γ ein Weg ist, dann ist $[\gamma]$ seine Homotopieklasse.

1 Geometrie der affinen Weylgruppe

Sei n eine streng positive ganze Zahl. Wir bezeichnen mit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ die kanonische Basis in \mathbb{R}^n und $\langle \cdot | \cdot \rangle$ das übliche Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n . Seien $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \dots + x_n = 0\}$ und $R = \{e_i - e_j, i \neq j\}$. Die Menge R heißt *Wurzelsystem* (der Form A_{n-1}). Wir bezeichnen mit $H_{(i,j),k}$ die affine Hyperebene von V , die besteht aus den Vektoren $x \in V$, sodass $\langle x | e_i - e_j \rangle = k$.

Definition 1. Die *affine Weylgruppe* bezüglich R ist die Gruppe W der affinen Transformationen in V erzeugt durch die affinen Spiegelungen bezüglich der Hyperebenen $H_{(i,j),k}$.

Wir bezeichnen mit $\sigma_{(i,j),k}$ die Spiegelung bezüglich $H_{(i,j),k}$. Es gilt für alle $x \in V$:

$$\sigma_{(i,j),k}(x) = x - 2(\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \frac{(e_i - e_j)}{\|e_i - e_j\|^2} = x - (\langle x | e_i - e_j \rangle - k)(e_i - e_j).$$

Man nennt *endliche Weylgruppe* die Untergruppe von W erzeugt durch die *linearen* Spiegelungen (das heißt, die Spiegelungen bezüglich der Hyperebenen $H_{(i,j),0}$). Betrachte das Gitter Q in V erzeugt durch R , anders gesagt, $Q = V \cap \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist die Abbildung $q \mapsto \tau_q$, wobei τ_q die Translation von Vektor q ist, eine natürliche Einbettung von Q in W , denn $\tau_{e_i - e_j} = \sigma_{(i,j),1} \circ \sigma_{(i,j),0}$.

Proposition 2. Die *endliche Weylgruppe* ist isomorph zu der symmetrischen Gruppe \mathfrak{S}_n . Die *affine Weylgruppe* ist das *semidirekte Produkt* von der *endlichen Weylgruppe* und dem Gitter Q . Also $W \simeq \mathfrak{S}_n \ltimes Q$. Die *Aktion der affinen Weylgruppe auf Q* ist gegeben durch

$$\sigma_{(i,j),0} \cdot \tau_{e_{i'} - e_{j'}} = \tau_{e_{i'} - e_{j'} - \langle e_{i'} - e_{j'} | e_i - e_j \rangle (e_i - e_j)}$$

für $i, j, i', j' \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Beweis. Sei W_{fin} die endliche Weylgruppe. Die Elemente von W_{fin} agieren nicht nur auf V sondern auch auf ganz \mathbb{R}^n , wobei die Punkte von V^\perp nicht geändert werden. Sei $\sigma \in W_{\text{fin}}$ die Spiegelung bezüglich $H_{(i,j),0} \oplus V^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n, \langle x | e_i - e_j \rangle = 0\}$. Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $\sigma(x) = x - \langle x | e_i - e_j \rangle (e_i - e_j)$. Berechne:

$$\begin{aligned}\sigma(e_i) &= e_i - \langle e_i | e_i - e_j \rangle (e_i - e_j) = e_i - (e_i - e_j) = e_j, \\ \sigma(e_j) &= e_j - \langle e_j | e_i - e_j \rangle (e_i - e_j) = e_j + e_i - e_j = e_i, \\ \forall k \neq i, j, \sigma(e_k) &= e_k - \langle e_k | e_i - e_j \rangle (e_i - e_j) = e_k.\end{aligned}$$

Ein beliebiges Element in W_{fin} ist eine Verknüpfung von solchen Spiegelungen, deswegen permutiert es die Basisvektoren $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ und wir erhalten einen Morphismus $W_{\text{fin}} \rightarrow \mathfrak{S}_n$. Dieser ist injektiv, denn eine lineare Abbildung, die die Basisvektoren invariant lässt, ist nötigerweise die Identität. Er ist auch surjektiv, denn die Spiegelung σ bezüglich $H_{(i,j),0} \oplus V^\perp$ tauscht e_i und e_j und lässt die anderen e_k invariant, und \mathfrak{S}_n ist durch die Transpositionen erzeugt. Daher ist $W_{\text{fin}} \simeq \mathfrak{S}_n$.

Um zu zeigen, dass $W = W_{\text{fin}} \rtimes Q$, genügt es zu zeigen, dass $W = Q \cdot W_{\text{fin}}$, dass Q ein Normalteiler in W ist, und dass $Q \cap W_{\text{fin}} = \{\text{id}\}$.

Seien $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k \in \mathbb{Z}$. Es gilt $\sigma_{(i,j),k} = \tau_{k(e_i - e_j)} \circ \sigma_{(i,j),0}$, daher $W = Q \cdot W_{\text{fin}}$. Um zu zeigen, dass Q ein Normalteiler in W ist, genügt es zu beweisen, dass W_{fin} das Gitter Q normalisiert. Es wird leicht berechnet:

$$\sigma_{(i,j),0} \circ \tau_{e_{i'} - e_{j'}} = \tau_{e_{i'} - e_{j'} - \langle e_{i'} - e_{j'} | e_i - e_j \rangle (e_i - e_j)} \circ \sigma_{(i,j),0}$$

und aus $\langle e_{i'} - e_{j'} | e_i - e_j \rangle \in \mathbb{Z}$ folgt das Resultat. Schließlich ist id die einzige lineare Translation, daher kommt $Q \cap W_{\text{fin}} = \{\text{id}\}$. \square

Definition 3. Auf V wird eine Äquivalenzrelation definiert durch: x und y in V sind äquivalent genau dann, wenn $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \mathbb{Z}, (\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle y | e_i - e_j \rangle - k) > 0$ oder $\langle x | e_i - e_j \rangle - k = \langle y | e_i - e_j \rangle - k = 0$. Die Menge der Äquivalenzklassen wird durch \mathcal{C} bezeichnet und die Elemente von \mathcal{C} werden *Facetten* genannt.

Seien $F \in \mathcal{C}$ eine Facette und $x \in F$. Wenn $\langle x | e_i - e_j \rangle = k$ für $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ und $k \in \mathbb{Z}$, dann $F \subset H_{(i,j),k}$. Natürlich kann x nicht in zwei getrennten parallelen Hyperebenen liegen, daher ist die Menge der Hyperebenen $H_{(i,j),k}$, die F enthalten, endlich und ihre Anzahl ist höchstens gleich die Anzahl der Untermengen $\{i, j\} \subset \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j$, das heißt höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$. Der Schnitt dieser Hyperebenen ist ein affiner Unterraum L von V , der *Träger* von F . Seine Dimension ist die *Dimension* von F . Also ist F der Schnitt von L mit offenen Halbräumen. Insbesondere ist F konvex und offen in L .

Die Menge \mathcal{C} bildet eine sogenannte *Zellzerlegung*¹ von V .

¹Die gewöhnliche Definition einer Zellzerlegung ist im allgemein stärker als unsere.

Definition 4. Sei X ein separierter topologischer Raum. Eine *Zellzerlegung* von X ist eine Familie \mathcal{C} von Unterräumen von X , so dass \mathcal{C} eine Partition von X bildet, und für alle $C \in \mathcal{C}$ ein Zahl $d \in \mathbb{N}$ existiert, so dass C homöomorph ist zu der unitären offenen Kugel B^d in \mathbb{R}^d . Ein Element von \mathcal{C} , der homöomorph zu B^d ist, heißt *d-Zelle*.

Die $(n-1)$ -Zellen, deren Dimension maximal ist (ihr Träger ist V), werden *Zimmer* genannt. Sie sind genau die zusammenhängenden Komponenten von $V \setminus \cup_{i,j,k} H_{(i,j),k}$. Wenn C ein Zimmer ist und $x_0 \in C$, kann man C beschreiben als die Menge der $x \in V$, so dass $(\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle x_0 | e_i - e_j \rangle - k) > 0$ für alle $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Wenn C ein Zimmer ist, dann nennt man *Seite* von C eine $(n-2)$ -Zelle F in \mathcal{C} (d.h. eine Zelle, deren Träger eine Hyperebene von V ist), so dass $\overline{C} \cap F$ nicht leer ist. Eine *Mauer* von C ist der Träger einer Seite von C .

Seien F eine $(n-2)$ -Zelle des Trägers $H_{(i_0, j_0), k_0}$ und $x_0 \in F$. Also ist F die Menge der $x \in V$, so dass $\langle x | e_{i_0} - e_{j_0} \rangle = k_0$ und $(\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle x_0 | e_i - e_j \rangle - k) > 0$ für i, j und k so dass $H_{(i,j),k} \neq H_{(i_0, j_0), k_0}$. Allgemeiner nehmen wir an, dass F eine Facette des Trägers $\cap_{H \in \mathfrak{H}} H$ ist, wobei \mathfrak{H} eine Familie von Hyperebenen unter den $H_{(i,j),k}$ ist. Für $x_0 \in F$ ist dann F die Menge der $x \in V$, die $\langle x | e_i - e_j \rangle = k$ erfüllen für alle i, j, k so dass $H_{(i,j),k} \in \mathfrak{H}$ und $(\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle x_0 | e_i - e_j \rangle - k) > 0$ für alle i, j, k so dass $H_{(i,j),k} \notin \mathfrak{H}$.

Proposition 5. Seien C ein Zimmer und F eine seiner Seiten. Es gilt $F \subset \overline{C}$. Genauer gesagt, falls H die einzige Hyperebene ist, die F enthält, dann gilt $\overline{C} \cap H = \overline{F}$.

Wird eine $(n-2)$ -Zelle F gegeben, so gibt es genau zwei Zimmer, von denen sie eine Seite ist.

Beweis. Sei $x_0 \in C$. Es gilt:

$$C = \{x \in V, (\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle x_0 | e_i - e_j \rangle - k) > 0, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

und daher

$$\overline{C} = \{x \in V, (\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle x_0 | e_i - e_j \rangle - k) \geq 0, \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

Seien $y_0 \in \overline{C} \cap F$ und $y \in F$ beliebig. Der Punkt y_0 ist ein Adhärenzpunkt von C , also für alle $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $k \in \mathbb{Z}$ gilt $(\langle x_0 | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle y_0 | e_i - e_j \rangle - k) \geq 0$. So ist y_0 auf der selbe Seite von $H_{(i,j),k}$ wie x_0 (möglicherweise $y_0 \in H_{(i,j),k}$) für alle i, j, k . Nun ist y in der selben Facette wie y_0 und damit ist auch auf der selbe Seite von jeder $H_{(i,j),k}$ wie y_0 , so wie x_0 . Daher kommt, dass $y \in \overline{C}$ und es folgt $F \subset \overline{C}$.

Die Punkte $y \in \overline{C} \cap H$ sind genau diejenigen, die auf H sind und bezüglich jeder $H_{(i,j),k}$ auf der selbe Seite wie x_0 . Sie sind auch genau diejenigen, die auf H sind und bezüglich jeder $H_{(i,j),k}$ auf der selbe Seite wie y_0 . Und das ist genau die Beschreibung von \overline{F} . Daher $\overline{C} \cap H = \overline{F}$.

Sei nun eine $(n-2)$ -Zelle F enthalten in der Hyperebene $H_{(i_0, j_0), k_0}$. Dann, falls C ein Zimmer ist, von dem F eine Seite ist, gilt es $(\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle y | e_i - e_j \rangle - k) \geq 0$ für alle $x \in C$ und $y \in F$ und alle $i \neq j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ und $k \in \mathbb{Z}$. Genauer gesagt: $(\langle x | e_i - e_j \rangle - k) \cdot (\langle y | e_i - e_j \rangle - k) > 0$ für i, j und k so dass $H_{(i, j), k} \neq H_{(i_0, j_0), k_0}$ und $\langle y | e_{i_0} - e_{j_0} \rangle - k_0 = 0$. Also gibt es für $x \in C$ zwei Möglichkeiten: entweder $\langle x | e_{i_0} - e_{j_0} \rangle - k_0 > 0$ oder $\langle x | e_{i_0} - e_{j_0} \rangle - k_0 < 0$, und diese Alternative hängt nicht auf die Wahl von x in C ab. So ist F eine Seite von höchstens zwei Zimmern. Umgekehrt ist F gerade eine Seite der beiden sodefinierten Zimmer. \square

Proposition 6. Die Gruppe W permutiert die Hyperebenen $H_{(i, j), k}$ und für alle d permutiert die d -Zellen.

Beweis. Seien $i, j, i', j' \in \llbracket 1, n \rrbracket$ und $k \in \mathbb{Z}$. Sei $x \in V$ und setze $y = \sigma_{(i, j), k}(x)$. Es gilt auch $x = \sigma_{(i, j), k}(y)$. Berechne

$$\begin{aligned} \langle x | e_{i'} - e_{j'} \rangle &= \langle y | e_{i'} - e_{j'} - (e_i - e_j) \langle e_{i'} - e_{j'} | e_i - e_j \rangle \rangle + k \langle e_{i'} - e_{j'} | e_i - e_j \rangle \\ &= \langle y | \sigma_{(i, j), k}(e_{i'} - e_{j'}) \rangle + k \langle e_{i'} - e_{j'} | e_i - e_j \rangle. \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass $\sigma_{(i, j), k}(e_{i'} - e_{j'}) \in R$. Der Grund ist, dass $k \langle e_{i'} - e_{j'} | e_i - e_j \rangle$ eine ganze Zahl ist, und nicht auf x abhängt. Wenn also $\sigma_{(i, j), k}(e_{i'} - e_{j'}) = e_{i''} - e_{j''}$, dann zeigt die obige Formel, dass das Bild durch $\sigma_{(i, j), k}$ von einer Hyperebene der Form $H_{(i', j'), k'}$ ist eine Hyperebene der Form $H_{(i'', j''), k''}$. Nun steht in dem Beweis der Proposition 2, dass $\sigma_{(i, j), k}$ die Basiselemente $(e_s)_{s \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ permutiert. So bildet tatsächlich $\sigma_{(i, j), k}$ jedes Element von R auf ein Element von R ab.

Die Tatsache, dass W die d -Zellen permutiert, folgt direkt daraus, dass W die $H_{(i, j), k}$ permutiert. \square

Sind C ein Zimmer und $x_0 \in C$, so ist C die Menge aller $x \in V$, so dass für alle Hyperebenen H der Form $H_{(i, j), k}$, x und x_0 (echt) auf der selben Seite bezüglich H sind. Eigentlich kann man dafür nur die Mauern von C betrachten:

Lemma 7. Das Zimmer C ist die Menge aller $x \in V$, so dass für alle Mauern H von C , x echt auf der selben Seite von H wie x_0 ist.

Beweis. Eine Richtung ist klar: falls $x \in C$, dann ist x auf der selbe Seite wie x_0 bezüglich jeder Mauer von C . Für die andere Richtung zeige zuerst ein Zwischenresultat. Sei $(f_m)_{m \in I}$ (0 enthalten in $I \subset \mathbb{N}$) eine Familie von Affinformen unter den $x \mapsto \langle x | e_i - e_j \rangle - k$, so dass $C = \{x \in V, \forall m \in I, f_m(x) > 0\}$. Zeige, dass, wenn die Hyperebene H der Gleichung $f_0 = 0$ keine Mauer von C ist, dann $C = \{x \in V, \forall m \in I \setminus \{0\}, f_m(x) > 0\}$. Sei $D = \{x \in V, \forall m \in I \setminus \{0\}, f_m(x) > 0\}$. Es genügt zu zeigen, dass für alle $x \in D$, $f_0(x) > 0$. Die Hyperebene H schneidet nicht D , denn $H \cap D$ ist offensichtlich enthalten in \overline{C} und ist offen in H , ist also entweder leer oder

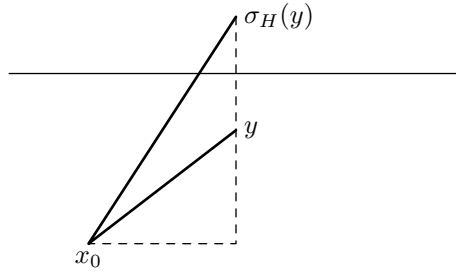


Abbildung 2: y auf der selbe Seite wie x_0

eine Seite von C . In dem zweite Fall würde aber H ein Mauer von C . Die stetige Abbildung f_0 hat also ein konstantes Vorzeichen auf D . Außerdem gilt $C \subset D$ und f_0 ist echt positiv auf C , so ist f_0 echt positiv auf D , was wir wollten. Durch Induktion folgt: falls $J \subset I$ eine endliche Menge ist, so dass für alle $m \in J$, die Hyperebene der Gleichung $f_m = 0$ kein Mauer von C ist, so gilt $C = \{x \in V, \forall m \in I \setminus J, f_m(x) > 0\}$.

Sei $x \in V$ auf der selben Seite wie x_0 bezüglich jeder Mauer von C . Das Segment $[x_0x]$ ist kompakt und trifft damit nur eine endliche Menge \mathfrak{H} von Hyperebenen unter den $H_{(i,j),k}$. Sie sind keine Mauer von C nach der Hypothese auf x . Daher ist C noch die Menge der $y \in V$, so dass y und x_0 auf der selben Seite sind bezüglich jeder Hyperebene H der Form $H_{(i,j),k}$, die nicht in \mathfrak{H} ist. Insbesondere erfüllt x diese Bedingung und so $x \in C$. \square

Proposition 8. *Die Gruppe W operiert transitiv auf der Menge der Zimmer. Sie ist durch die affinen Spiegelungen bezüglich der Mauern eines festgestelltes Zimmers erzeugt.*

Beweis. Lege ein Zimmer C fest und definiere W_m als die Untergruppe von W erzeugt durch die Spiegelungen bezüglich der Mauern von C . Zeige zunächst, dass für jede $x \in V \setminus \cup_{i,j,k} H_{(i,j),k}$ es ein $w \in W_m$ existiert, so dass $w(x) \in C$. Sei O_x der Orbit von x durch W_m , und sei $x_0 \in C$. Da $W/Q \simeq \mathfrak{S}_n$ endlich ist, existiert eine Kugel des Mittelpunktes x_0 deren Schnitt mit O_x endlich ist, und daher existiert $y \in O_x$, so dass $\|y - x_0\| \leq \|y' - x_0\|$ für alle $y' \in O_x$. Zeige, dass $y \in C$. Nach dem vorigen Lemma genügt es zu zeigen, dass y auf derselbe Seite wie x_0 ist bezüglich jeder Mauer H von C . Sei σ_H die Spiegelung bezüglich so einem H . Es gilt $\sigma_H \in W_m$, und deshalb $\sigma_H(y) \in O_x$. Nach der Definition von y gilt $\|\sigma_H(y) - x_0\| \geq \|y - x_0\|$. Nun sind y und $\sigma_H(y)$ beiderseits H . Sie sind nicht auf H denn x gehört einem Zimmer und damit y und $\sigma_H(y)$ auch. Da y näher an x_0 ist als $\sigma_H(y)$, folgt wegen dem Satz des Pythagoras, dass y auf der selben Seite von H wie x_0 ist (siehe Abb. 2). Das ist wahr für jede Mauer H von C und so $y \in C$.

Nach diesem vorbereitenden Resultat zeige nun, dass W und sogar W_m transitiv operiert auf der Menge der Zimmer. Sei C' ein Zimmer und sei $x'_0 \in C'$. Nach dem

Vorigen, existiert $w \in W_m$, so dass $w(x'_0) \in C$. So ist $w(C')$ ein Zimmer, das einen Punkt von C enthält: es ist also C selbst.

Um zu zeigen, dass $W = W_m$, genügt es zu zeigen, dass für jede $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ und $k \in \mathbb{Z}$ die Spiegelung $\sigma' = \sigma_{(i,j),k}$ in W_m liegt. Sei C' ein Zimmer, von dem $H' = H_{(i,j),k}$ eine Mauer ist. Dann existiert $w \in W_m$, so dass $w(C') = C$ und es folgt, dass es eine Mauer H von C existiert, so dass $w(H') = H$. Es gilt also $\sigma' = w^{-1} \circ \sigma_H \circ w$, das wohl ein Element in W_m ist. Demnach ist W erzeugt durch die Spiegelungen bezüglich der Mauern von C . \square

Insbesondere sind alle Zimmer isometrisch.

Proposition 9. *Die Zimmer sind Simplexe (der Dimension $n - 1$). (Jedes hat also n Mauern.)*

Beweis. Da alle Zimmer isometrisch sind genügt es, ein Zimmer vorzuzeigen, das ein Simplex ist. Sei $C = \{x \in V, \forall i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, x_i - x_{i+1} > 0, x_1 - x_n < 1\}$. Wähle $n - 1$ Gleichungen unter folgenden: $x_i - x_{i+1} = 0, x_1 - x_n = 1$ und füge die Gleichung $x_1 + \dots + x_n = 0$ hinzu. Damit erhält man n lineare Systeme. Durch Lösen dieser Systeme prüft man leicht, dass C ein Simplex ist, der Ecken

$$P_i = \left(\underbrace{\frac{i}{n}, \dots, \frac{i}{n}}_{n-i}, \underbrace{-\frac{n-i}{n}, \dots, -\frac{n-i}{n}}_i \right).$$

Es ist auch wohl ein Zimmer. Denn $x = (x_1, \dots, x_n) \in V$ gehört C genau dann, wenn $x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < x_n + 1$, was noch gleichbedeutend ist dazu: für alle $i < j$, $\langle x | e_i - e_j \rangle = x_i - x_j < k$ falls $k \geq 1$, und $x_i - x_j > k$ falls $k \leq 0$. Da $H_{(j,i),k} = H_{(i,j),-k}$ folgt, dass C ein Zimmer ist. \square

Werfen wir einen Blick auf die Geometrie eines Zimmers. Nehme an, dass $n > 2$. Seien H und H' zwei Mauern eines Zimmers C , und sei F der Schnitt von H und H' (das ist ein Unterraum der Dimension $n - 3$). Durch Schneiden das Zimmer C durch eine senkrechte Ebene zu F kann man den Winkel zwischen H und H' messen.

Proposition 10. *Der (geometrische) Winkel zwischen H und H' ist entweder gleich $\frac{\pi}{6}$ oder gleich $\frac{\pi}{4}$. Genauer gesagt existiert eine Indizierung $(H_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ der Mauern von C , so dass der Winkel zwischen H_i und H_{i+1} gleich $\frac{\pi}{6}$ ist und der Winkel zwischen H_i und H_j gleich $\frac{\pi}{4}$ ist falls $i - j \neq -1, 0, 1$.*

Beweis. Betrachte zum Beispiel das Zimmer $C = \{x \in V, \forall i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket, x_i - x_{i+1} > 0, x_1 - x_n < 1\}$, dessen Mauern die n Hyperebene $H_i = H_{(i,i+1),0}$ et $H_0 = H_{(1,n),1}$ sind. Nach Definition der $H_{(i,j),k}$ ist $e_i - e_j$ ein Normalvektor zu $H_{(i,j),k}$. Setze $\alpha_i = e_i - e_{i+1}$ für $i \in \llbracket 1, n - 1 \rrbracket$ und $\alpha_0 = e_n - e_1$. Der Winkel $\theta_{i,j} \in [0, \pi)$ zwischen den Hyperebenen H_i und H_j erfüllt $\cos \theta_{i,j} = -\frac{\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle}{\|\alpha_i\| \|\alpha_j\|}$. Für $i \neq j$ gilt $\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = 0$ falls $i - j \neq -1, 1$

und $\langle \alpha_i | \alpha_j \rangle = -1$ falls $i = j + 1$ oder $j = i + 1$ und $\|\alpha_i\| \|\alpha_j\| = 2$. Daher $\cos \theta_{i,j} = 0$, das heißt $\theta_{i,j} = \frac{\pi}{2}$, falls $i - j \neq -1, 0, 1$, und $\cos \theta_{i,i+1} = \frac{1}{2}$, das heißt $\theta_{i,i+1} = \frac{\pi}{3}$.

Diese Indizierung der Mauern von C liefert eine Indizierung der Mauern eines beliebigen Zimmers durch die Aktion der affinen Weylgruppe. \square

2 Präsentation des Regularorbitenraum

Erinnerung: $H_{(i,j),k}$ ist die affine Hyperebene von V der Vektoren x , so dass $\langle x | e_i - e_j \rangle = k$. Bezeichne auch mit $V_{(i,j),k}^+ = \{x, \langle x | e_i - e_j \rangle > k\}$ und $V_{(i,j),k}^- = \{x, \langle x | e_i - e_j \rangle < k\}$ die offene Halbräume getrennt durch $H_{(i,j),k}$. Im folgendem werden wir manchmal Hyperebene wie oben mit einem einzigen Index indizieren. In dem Fall benötigen wir mit V_i^\pm die Halbräume durch H_i getrennt. Wir bezeichnen auch H_i^0 die lineare Hyperebene, die die Richtung von H_i ist, und $V_i^{0\pm}$ die Hyperebene getrennt durch H_i^0 .

Betrachte den Raum $V_{\mathbb{C}} = V + \mathbf{i}V$. Die Gruppe W operiert auf $V_{\mathbb{C}}$ wie folgt: seien $\sigma \in W$ die affine Spiegelung der Hyperebene $H_{(i,j),k}$, σ^0 die lineare Spiegelung der Hyperebene $H_{(i,j),0}$ und sei $x + \mathbf{i}y \in V_{\mathbb{C}}$. Dann $\sigma(x + \mathbf{i}y) = \sigma(x) + \mathbf{i}\sigma^0(y)$. Bezeichne

$$Y = V_{\mathbb{C}} \setminus \bigcup_{i,j,k} (H_{(i,j),k} + \mathbf{i}H_{(i,j),0}).$$

Die Punkte in Y heißen *reguläre Punkte* unter der Aktion von W auf $V_{\mathbb{C}}$. Das sind die Punkte, die durch kein Element in W stabil sind außer die Identität. Offensichtlich operiert noch W auf Y . Der Raum Y/W heißt *Regularorbitenraum* unter W . Bezeichne mit π die kanonische Projektion von Y nach Y/W . Im Gegensatz zu $V \setminus \bigcap_{i,j,k} H_{(i,j),k}$ ist Y wegzusammenhängend. Das Ziel dieser Sektion ist, folgenden Satz zu beweisen.

Satz 11. *Die Fundamentalgruppe des Raumes Y/W besitzt eine Präsentation durch Erzeuger und Relationen definiert durch die Erzeuger $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ und für $n \geq 3$, die Relationen*

- (a) $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,
- (b) $s_i s_j = s_j s_i$ für alle i und j , so dass $i - j \neq -1, 0, 1$.

Wir erstellen eine Zellzerlegung $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ von Y , die auf natürliche Weise aus der Zellzerlegung \mathcal{C} von V der vorige Sektion erhalten wird. Die $(2n - 2)$ -Zellen von $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ sind die Untermengen der Form $C + \mathbf{i}V$, wobei C ein Zimmer ist, und für $d \geq 1$ sind die $(2n - 2 - d)$ -Zellen die Untermengen der Form $Z + \mathbf{i}V_{i_1}^{0\pm} \cap \dots \cap V_{i_d}^{0\pm}$, wobei Z eine $(n - 1 - d)$ -Zelle von \mathcal{C} ist und $\{H_{i_1}, \dots, H_{i_d}\}$ die Menge der Hyperebenen unter den $H_{(i,j),k}$, die Z enthalten. Zum Beispiel sind die $(2n - 3)$ -Zellen genau die Untermengen der Form $C_i + \mathbf{i}V_i^{0\pm}$, wobei C_i eine $(n - 2)$ -Zelle der Mauer H_i ist. Dadurch erhalten

wir in der Tat eine Zellzerlegung von Y . Bemerke, dass jede $(2n - 3)$ -Zelle genau zwei $(2n - 2)$ -Zellen umrandet. Dies liegt daran, dass jede $(n - 2)$ -Zelle in \mathcal{C} eine Seite genau zweier Zimmer ist.

Wie im Fall von \mathcal{C} bildet W jede d -Zelle von $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ auf eine d -Zelle und operiert transitiv auf die Menge der $(2n - 2)$ -Zellen. Es wird also eine Zellzerlegung $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}/W$ von Y/W erhalten, die eine einzige $(2n - 2)$ -Zelle enthält.

Lege ein Zimmer C von V fest und einen Punkt $p(C + iV)$ in $C + iV$. Wähle den Punkt $\tilde{p} = \pi(p(C + iV))$ in der $(2n - 2)$ -Zelle von Y/W als Basispunkt um die Fundamentalgruppe zu berechnen. Eine Schleife der Basis \tilde{p} in Y/W wird hochgehoben in Y in einen eindeutigen Weg des Ursprungs $p(C + iV)$.

Für jede Mauer H_i von C wird auch einen Punkt $p(C_i + iV_i^{0\pm})$ in $C_i + iV_i^{0\pm}$ festgestellt. Wenn C' eine beliebige $(2n - 2)$ -Zelle oder $(2n - 3)$ -Zelle von \mathcal{C} ist, dann ist sie konjugiert durch W zu einer eindeutigen Zelle unter $C + iV$ und den $C_i + iV_i^{0\pm}$ und wir bezeichnen mit $p(C')$ den Punkt in der Orbit von $p(C + iV)$ oder $p(C_i + iV_i^{0\pm})$, der zu C' gehört.

Definition 12. Seien C' eine $(2n - 2)$ -Zelle, M eine $(2n - 3)$ -Zelle, die C' umrandet, und C'' die andere $(2n - 2)$ -Zelle, die durch M umrandet ist. Ein *elementarer Weg* (durch M) in Y ist ein Weg γ von $p(C')$ nach $p(C'')$, so dass $\gamma([0, 1])$ die Vereinigung der Segmente $[p(C')p(M)]$ und $[p(M)p(C'')]$ ist.

Die Zellen von $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ sind alle konvex, und so ist $[p(C')p(M)]$ ganz enthalten in C' und $[p(M)p(C'')]$ ganz enthalten in C'' .

Es gibt bis auf Homotopie genau zwei elementare Wege durch M : der von $p(C')$ nach $p(C'')$ und der von $p(C'')$ nach $p(C')$. Die Homotopieklasse eines ist invers zu der anderen.

Definition 13. Ein *einfacher Weg* ist ein Weg in Y gebildet mit endlich vielen elementaren Wegen.

Sei $\gamma = \delta_1 \cdots \delta_r$ ein einfacher Weg, die δ_i seien elementar. Nehme an, es existieren $(2n - 2)$ -Zellen C_1, \dots, C_r und $(2n - 3)$ -Zellen M_1, \dots, M_r in $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$, so dass

- M_i umrandet C_i und C_{i+1} (bzw. C_r und C_1) und δ_i ist ein Weg von $p(C_i)$ nach $p(C_{i+1})$ (bzw. von $p(C_r)$ nach $p(C_1)$) durch M_i , für alle $i \in \llbracket 1, r - 1 \rrbracket$ (bzw. $i = r$),
- die \overline{M}_i schneiden sich entlang einer gemeinsamen $(2n - 4)$ -Zelle N .

Es wird dann gesagt, dass γ die $(2n - 4)$ -Zelle N umringt.

Lemma 14. Jeder Weg in Y ist homotop zu einem einfachen Weg.

Beweis. Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$ ein Weg in Y . Da Y zusammenhängend ist, kann man oBdA annehmen, dass die Endpunkte von γ in $(2n - 2)$ -Zellen von $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ sind. Es ist klar, dass γ nur endlich viele Zellen trifft, denn $\gamma([0, 1])$ ist kompakt. Um das Lemma zu beweisen, genügt es, zu zeigen, dass man γ umformen kann in einen Weg, der nur $(2n - 2)$ - und $(2n - 3)$ -Zellen trifft, und der jede $(2n - 3)$ -Zelle transversal trifft. Nummeriere C_1, \dots, C_r die $(2n - 2)$ -Zellen, die γ in dieser Reihenfolge überquert. Es existiert eine Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ des Intervalls $[0, 1]$, so dass $\gamma([t_{i-1}, t_i]) \subset \overline{C_i}$. Der Weg γ kann umgeformt werden, so dass er die Grenze der C_i transversal in den t_i trifft, und wir nehmen jetzt an, das ist der Fall. Wenn $\gamma(t_i)$ enthalten ist in einer $(2n - 3)$ -Zelle für jedes i , dann sind wir fertig mit dem Beweis. Sonst existiert i , so dass $\gamma(t_i)$ enthalten ist in einer Zelle der Dimension höchstens $2n - 4$. Sei für jedes i eine offene Kugel B_i , so dass $\gamma(t_i) \in B_i \subset Y$ und genügend klein, so dass die B_i paarweise disjunkt sind. Da B_i kontrahierbar ist, kann der Teil von γ in B_i umgeformt werden in einen Weg, der nicht mehr durch die k -Zelle durchführt für $k < 2n - 3$ und der die $(2n - 3)$ -Zelle transversal überquert. Es gibt endlich viele $\gamma(t_i)$ und so kann man γ umformen, so dass er nur $(2n - 2)$ -Zellen und $(2n - 3)$ -Zellen trifft. \square

Seien γ_1 und γ_2 zwei einfache Wege. Wir nennen γ_1 und γ_2 *einfach äquivalent* falls γ_1 und γ_2 der Form

$$\gamma_1 = l_1 \delta_1 \cdots \delta_r l_2 \text{ et } \gamma_2 = l_1 \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_t l_2$$

sind, wobei $\delta_1, \dots, \delta_r, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$ elementare Wege sind, so dass $\delta_1 \cdots \delta_r \varepsilon_t^{-1} \cdots \varepsilon_1^{-1}$ eine $(2n - 4)$ -Zelle umringt.

Die Wege γ_1 und γ_2 heißen *äquivalent* falls eine endliche Sequenz von Wegen $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(r)}$ existiert, so dass $\gamma^{(1)} = \gamma_1$, $\gamma^{(r)} = \gamma_2$ und $\gamma^{(i)}$ einfach äquivalent ist zu $\gamma^{(i+1)}$ für alle $i \in \llbracket 1, r - 1 \rrbracket$.

Lemma 15. *Zwei einfache Wege sind genau dann äquivalent, wenn sie homotop sind.*

Beweis. Nach Definition ist es klar, dass zwei äquivalente einfache Wege homotop sind. Umgekehrt: sei $F : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ eine Homotopie zwischen zwei einfachen Wegen γ und γ' . Durch ein ähnliches Argument wie im Lemma zuvor kann man die Fläche $F([0, 1] \times [0, 1])$ umformen, so dass sie nur $(2n - 2)$ -Zellen, $(2n - 3)$ -Zellen und $(2n - 4)$ -Zellen trifft, und so dass sie jede $(2n - 4)$ -Zelle transversal trifft. Dann kann γ mit Hilfe dieser neuen Fläche in γ' umgeformt werden. Während dieser Umformung, jedes Mal, wenn die Fläche eine $(2n - 4)$ -Zelle überquert, wird γ in einen einfach äquivalenten Weg umgeformt, und schließlich ist γ äquivalent zu γ' . \square

Beenden wir jetzt den Beweis des Satzes 11. Sei $\pi(\gamma)$ eine Schleife in Y/W der Basis \tilde{p} , die in einen Weg γ der Basis $p(C)$ in Y hochgehoben wird. Sei $\delta_1 \cdots \delta_r$ ein einfacher Weg homotop zu γ , wobei die δ_i elementare Wege sind. Dann ist $\pi(\delta_1) \cdots \pi(\delta_r)$ homotop zu $\pi(\gamma)$ in Y/W .

Falls δ und δ' zwei elementare Wege sind, suchen wir unter welche Bedingung $\pi(\delta)$ und $\pi(\delta')$ homotop sind.

Lemma 16. *Sei $C \in \mathcal{C}$ ein festes Zimmer, und seien C_1, \dots, C_n seine Seiten. In Y/W gibt es n $(2n - 3)$ -Zelle, nähmlich genau die $\pi(C_i + \mathbf{i}V_i^{0+})$.*

Beweis. Sei M eine beliebige $(2n - 3)$ -Zelle in Y und sei $C' + \mathbf{i}V$ ein Zimmer, das sie umrandet. Die Abbildung $w \in W$, die C' auf C schickt, bildet M ab auf eine der Zellen $C_i + \mathbf{i}V_i^{0\pm}$. Außerdem gilt in $V_{\mathbb{C}}$: $\sigma_i(C_i + \mathbf{i}V_i^{0-}) = C_i + \mathbf{i}V_i^{0+}$ wobei $\sigma_i \in W$ die Spiegelung ist bezüglich den Träger von C_i .

Andererseits sind die Zellen $\pi(C_i + \mathbf{i}V_i^{0+})$ paarweise verschieden, denn die Zellen C_i nicht konjugiert bei W in V sind. \square

Seien δ und δ' zwei elementare Wege. Seien M und M' die $(2n - 3)$ -Zellen, die durch δ beziehungsweise δ' durchquert werden. Dann gilt $\pi(M) = \pi(M')$ genau dann, wenn $\pi(\delta)$ homotop ist zu $\pi(\delta')$ oder $\pi(\delta')^{-1}$.

Falls $n > 2$ nummeriere die Mauer von C wie in der Proposition 10 und bezeichne mit C_i die Seite von C , die in H_i enthalten ist. Sei γ_i ein elementarer Weg mit Anfangspunkt $p(C + \mathbf{i}V)$, der durch $C_i + \mathbf{i}V_i^{0+}$ geht, und sei $s_i = [\pi(\gamma_i)]$ die Homotopieklasse von $\pi(\gamma_i)$ in Y/W . Nach dem Vorigen ist $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$ eine Familie von Erzeugern von $\pi_1(Y/W)$. Bleibt noch, die Relationen zu finden.

Lemma 17. *Nehme an $n > 2$. Für jedes $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ gilt $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ und für jede $i, j \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, so dass $i - j \neq -1, 0, 1$, gilt $s_i s_j = s_j s_i$. Diese Relationen definieren die Gruppe $\pi_1(Y/W)$.*

Beweis. Seien $\pi(\gamma)$ und $\pi(\gamma')$ zwei Schleife in Y/W , die werden in zwei einfache Wege γ und γ' mit Anfangspunkt $p(C + \mathbf{i}V)$ in Y hochgehoben.

Da γ und γ' den selben Anfangspunkt haben sind $\pi(\gamma)$ und $\pi(\gamma')$ genau dann homotop, wenn γ und γ' homotop sind. Nach dem Lemma 15 ist das genau dann der Fall, wenn γ und γ' als einfache Wege äquivalent sind.

Die Definition der Äquivalenz führt uns dazu, die Bedingung zu studieren, unter den ein Produkt $\delta_1 \cdots \delta_r$ einfacher Wege eine Schleife ist, die eine $(2n - 4)$ -Zelle umringt. Sei $s(\delta_j)$ die Homotopieklasse von $\pi(\delta_j)$: $s(\delta_j)$ ist entweder ein s_i oder ein s_i^{-1} . Wähle eine $(2n - 4)$ -Zelle und betrachte eine (reale) Ebene, die ihr orthogonal ist in einem ihrer Punkte. In dieser Ebene ist die Anordnung der $(2n - 3)$ -Zellen um die $(2n - 4)$ -Zelle wie in der Abbildung 3 oder der Abbildung 4 (abhängig von dem Winkel zwischen den $(2n - 3)$ -Zellen, siehe Proposition 10). Nehme an, dass $\delta_1 \cdots \delta_r$ unsere $(2n - 4)$ -Zelle umringt. Im ersten Fall gilt $r = 6$ und abgesehen von einer Inversion oder zirkulären Permutation gilt für ein i : $s(\delta_1) = s(\delta_3) = s_i$, $s(\delta_2) = s_{i+1}$, $s(\delta_4) = s(\delta_6) = s_{i+1}^{-1}$ und $s(\delta_5) = s_i^{-1}$. Im zweiten Fall gilt $r = 4$ und abgesehen von einer Inversion oder zirkulären Permutation gilt für ein i und ein j , verschieden und nicht konsekutiv: $s(\delta_1) = s_i$, $s(\delta_2) = s_j$, $s(\delta_3) = s_i^{-1}$ und $s(\delta_4) = s_j^{-1}$. Umgekehrt, falls die δ_i in einer dieser

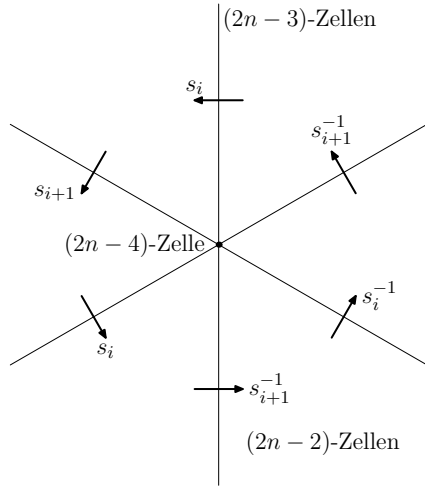


Abbildung 3: Winkel $\frac{\pi}{6}$

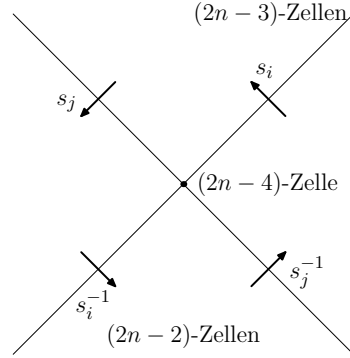


Abbildung 4: Winkel $\frac{\pi}{4}$

Situationen sind, dann umringt $\delta_1 \cdots \delta_r$ eine $(2n - 4)$ -Zelle. Wir bekommen damit die angekündigten Relationen.

Die Wege γ und γ' sind genau dann äquivalent, wenn Einer aus dem Zweiten durch die Anwendung eine endliche Sequenz dieser Relationen erhalten wird. Das Lemma ist bewiesen. \square

In den Spezialfällen, wenn $n = 1$ oder $n = 2$, gibt es keine $(2n - 4)$ -Zelle und daher keine Relation. Wir sind jetzt mit dem Beweis des Satzes 11 fertig.

3 Präsentation der erweiterten Zopfgruppe

In dieser Sektion geben wir eine Präsentation der Zopfgruppe mit n Strängen in \mathbb{C}^* , das heißt der Gruppe $\tilde{\mathcal{B}}_n = \pi_1(\{S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n\})$.

Satz 18. Die Gruppe $\tilde{\mathcal{B}}_n$ besitzt folgende Präsentation durch Erzeuger und Relationen:
 Erzeuger: $(s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$, u. Relationen:

1. (a) $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ für alle $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, wenn $n \geq 3$,
 (b) $s_i s_j = s_j s_i$ für i und j , so dass $i - j \neq -1, 0, 1$,
2. $u s_i u^{-1} = s_{i-1}$ für alle $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Lemma 19. Der Raum Y/W ist homöomorph zu

$$\{S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n, \prod_{z \in S} z = 1\}.$$

Beweis. Erinnerung, nach dem Lemma 2, dass die affine Weylgruppe W isomorph ist zu dem semidirekten Produkt $\mathfrak{S}_n \ltimes Q$, wobei Q das Gitter erzeugt durch die $e_i - e_j$ in $V = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + \dots + x_n = 0\}$ ist. Die Gruppe \mathfrak{S}_n operiert auf V und $V_{\mathbb{C}}$ durch Permutation der Koordinaten und das Gitter Q durch Translation des Realteils (das Imaginärteil bleibt fest). So ist Y/W homöomorph zu $(Y/Q)/\mathfrak{S}_n$. Nun ist Y/Q homöomorph zu

$$\{(z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^n, z_i \neq z_j \text{ wenn } i \neq j, z_1 + \dots + z_n = 0\}.$$

Denn $Y = V_{\mathbb{C}} \cap (\mathbb{C}^n \setminus \cup_{i \neq j, k \in \mathbb{Z}} \{z_i - z_j = k\})$ und, wenn man Q in $V_{\mathbb{C}}$ einbettet, gilt $Q = V_{\mathbb{C}} \cap \mathbb{Z}^n$.

Es folgt, dass $Y/W \simeq (Y/Q)/\mathfrak{S}_n$ homöomorph ist zu

$$\{S \subset \mathbb{C}/\mathbb{Z}, |S| = n, \sum_{z \in S} z = 0\}$$

was noch mittels $\exp(2i\pi \cdot)$ homöomorph ist zu

$$\{S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n, \prod_{z \in S} z = 1\},$$

was wir beweisen wollten. □

Setze $A = \{S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n, \prod_{z \in S} z = 1\}$ und $B = \{S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n\}$. Erinnerung, dass $\pi_1(Y/W) = \pi_1(A, p)$ und $\tilde{\mathcal{B}}_n = \pi_1(B, p)$ (wähle als Basispunkt $p = \{\eta, \eta\zeta, \dots, \eta\zeta^{n-1}\}$, wobei $\zeta = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ und $\eta = 1$, falls n ungerade, $\eta = e^{\frac{i\pi}{n}}$, falls n gerade). Nach dem Satz 11 und dem Lemma 19 gilt

$$\pi_1(A) \simeq \langle (s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}; \text{rel. 1. (a) und (b) wenn } n \geq 3 \rangle.$$

Sei γ eine Schleife in B , das heißt eine stetige Abbildung von $[0, 1]$ nach B , so dass $\gamma(0) = \gamma(1) = p$. Für $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ bezeichne mit γ_i den stetigen Weg von $[0, 1]$ nach \mathbb{C}^* , so dass $\gamma_i(0) = \eta\zeta^i$ und $\gamma(t) = \{\gamma_0(t), \dots, \gamma_{n-1}(t)\}$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann ist die Abbildung $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}^*$ definiert durch $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_0(t) \gamma_1(t) \cdots \gamma_{n-1}(t)$ eine Schleife in \mathbb{C}^* mit Basispunkt 1. Denn $\tilde{\gamma}(0) = \eta \times \eta\zeta \times \cdots \times \eta\zeta^{n-1} = 1$, und außerdem existiert eine Permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, so dass $\gamma_i(1) = \eta\zeta^{\sigma(i)}$ für alle i und $\tilde{\gamma}(1) = \eta\zeta^{\sigma(0)} \times \cdots \times \eta\zeta^{\sigma(n-1)} = 1$. Definiere nun $\text{ind}(\gamma)$ als der Index von der Schleife $\tilde{\gamma}$ in \mathbb{C}^* . Die Abbildung ind hängt nur von der Homotopieklasse von γ ab und induziert einen Gruppenhomomorphismus von $\tilde{\mathcal{B}}_n$ nach \mathbb{Z} , den wir noch mit ind bezeichnen.

Lemma 20. *Es gibt eine spaltende exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \pi_1(A, p) \longrightarrow \tilde{\mathcal{B}}_n \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Beweis. Zeige zuerst, dass der Morphismus $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(B)$, kanonischer Morphismus induziert durch die Inklusion $A \subset B$, injektiv ist. Stelle $C = \{(S, \alpha), S \subset \mathbb{C}^*, |S| = n, \alpha \in \mathbb{C}^*, \alpha^n = \prod_{z \in S} z\}$. Zeige, dass C mit der Abbildung $\text{pr} : C \rightarrow B, (S, \alpha) \mapsto S$ eine Überlagerung mit n Blättern von B ist. Die Abbildung $z \mapsto z^n$ definiert eine Überlagerung mit n Blättern von \mathbb{C}^* durch \mathbb{C}^* , was bedeutet, man kann lokal n stetige Zweige der n -ten Wurzel definieren. Sei $S = \{z_1, \dots, z_n\} \in B$ und seien U_1, \dots, U_n Umgebungen von z_1, \dots, z_n in \mathbb{C}^* , die paarweise disjunkt sind, und so dass man n stetige Zweige von $\sqrt[n]{\cdot}$ auf $U_1 \cdots U_n = \{z'_1 \cdots z'_n, z_i \in U_i\}$ definieren kann, die man $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nummeriere. Sei also $U = \{\{z'_1, \dots, z'_n\}, z'_i \in U_i\}$. Dies ist eine Umgebung von S in B . Es gilt $\text{pr}^{-1}(U) = \{(S', \alpha') \in C, S' \in U\}$ und mit den gewählten Zweigen der n -ten Wurzel:

$$\text{pr}^{-1}(U) = \{(\{z'_1, \dots, z'_n\}, \alpha_i(z'_1 \cdots z'_n)), \{z'_1, \dots, z'_n\} \in U, i \in \llbracket 1, n \rrbracket\},$$

was homöomorph ist zu $U \times \llbracket 1, n \rrbracket$. Der Raum C ist homöomorph zu $A \times \mathbb{C}^*$ durch die Umkehrabbildungen

$$(\{z_1, \dots, z_n\}, \alpha) \mapsto (\{\frac{z_1}{\alpha}, \dots, \frac{z_n}{\alpha}\}, \alpha)$$

und

$$(\{z_1 \alpha, \dots, z_n \alpha\}, \alpha) \mapsto (\{z_1, \dots, z_n\}, \alpha)$$

und folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & & C \\ & \nearrow^{S \mapsto (S,1)} & \downarrow \text{pr} \\ A & \xrightarrow{c} & B \end{array}$$

Das induziert auf die Fundamentalgruppen einen Isomorphismus $\pi_1(C) \simeq \pi_1(A) \times \mathbb{Z}$ und Morphismen

$$\begin{array}{ccc} & & \pi_1(C) \\ & \nearrow & \downarrow \text{pr}_* \\ \pi_1(A) & \longrightarrow & \pi_1(B) \end{array}$$

Weil $\text{pr} : C \rightarrow B$ eine Überlagerung ist, ist pr_* injektiv. Die Abbildung $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(C)$ ist einfach die Inklusion von $\pi_1(A)$ in $\pi_1(C) \simeq \pi_1(A) \times \mathbb{Z}$ und ist also auch injektiv. Folglich ist $\pi_1(A) \rightarrow \pi_1(B)$ genauso injektiv.

Zeige jetzt, dass $\ker \text{ind} = \pi_1(A)$. Sei γ eine Schleife in A . Dann gilt für jedes t , $\tilde{\gamma}(t) = \gamma_0(t)\gamma_1(t) \cdots \gamma_{n-1}(t) = 1$. Daher ist der Index von $\tilde{\gamma}$ in \mathbb{C}^* gleich 0 und $[\tilde{\gamma}] \in \ker \text{ind}$. Seien umgekehrt $[\tilde{\gamma}] \in \ker \text{ind}$ und $\tilde{\gamma}$ ein Repräsentant von $[\tilde{\gamma}]$. Das Index von $\tilde{\gamma}$ ist gleich 0, deswegen ist $\tilde{\gamma}$ homotop zu der konstanten Schleife 1. Sei $F : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$

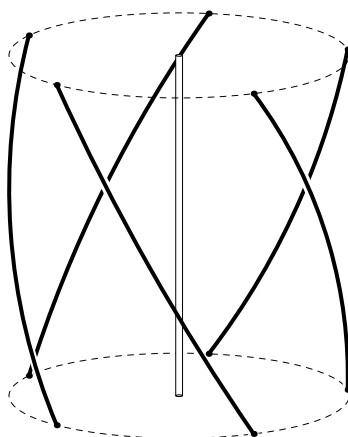


Abbildung 5: Zopf u

so eine Homotopie. Da F eine Homotopie ist zwischen γ und 1 ist $F([0, 1]^2)$ ein einfach zusammenhängender Teil von \mathbb{C}^* und damit existiert auf $F([0, 1]^2)$ ein stetiger Zweig der n -ten Wurzel. So existiert $f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{C}^*$ stetig, so dass $f^n = F$. Mit Hilfe dieser Homotopie f , forme jeden Weg γ_i in \mathbb{C}^* stetig in einen Weg γ'_i um, so dass einerseits $\gamma'_i(t) \neq \gamma'_j(t)$ für jedes t und jede $i \neq j$ und andererseits $\gamma'_0 \cdots \gamma'_{n-1} = 1$. Also ist γ homotop zu $\{\gamma'_0, \dots, \gamma'_{n-1}\}$. Es folgt, dass $[\gamma] \in \pi_1(A, p)$.

Schließlich, sei u der durch $u_i(t) = \eta \zeta^{(1-t)i+t(i+1)}$ definierte Zopf (siehe Abb. 5). Es gilt $\tilde{u} = \zeta^{nt}$ und so $\text{ind}(u) = 1$. Der Morphismus $\mathbb{Z} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_n$, der k auf u^k bildet, ist ein Schnitt für ind , was zeigt, dass $\tilde{\mathcal{B}}_n \rightarrow \mathbb{Z}$ surjektiv ist, und dass die exakte Sequenz spaltet. \square

Also ist $\tilde{\mathcal{B}}_n$ isomorph zu dem semidirekt Produkt $\pi_1(A, p) \rtimes \mathbb{Z}$. Bleibt noch zu verstehen, wie u auf der Gruppe $\pi_1(A, p)$ operiert.

Lemma 21. *Die Erzeuger s_i des Satzes 11 sind in $\pi_1(A, p)$ durch Zöpfe wie in der Abbildung 6 repräsentiert.*

Beweis. Sei C das in den Beweisen der Propositionen 9 und 10 betrachtete Zimmer, seine Mauern seien wie in der Proposition 10 nummeriert. Der wie in der Sektion 2 definierte Erzeuger s_i ist die Homotopieklasse einer Schleife, die in Y hochgehoben wird in einen Weg γ mit Anfangspunkt $p = p(C + iV)$ in der $(2n - 2)$ -Zelle $C + iV$, der ein einziges Mal und transversal die $(2n - 3)$ -Zelle $C_i + iV_i^{0+}$ durchquert, und der in dem Punkt p' symmetrisch von p bezüglich $H_i + iH_i^0$ endet. Auf dieser Weise wird $\gamma(1) = p'$ aus $\gamma(0) = p$ erhalten durch den Austausch der Koeffizienten i und $i + 1$ (außer für den „Grenzfall“ $i = n = 0$ und $i + 1 = 1$, wo zusätzlich 1 zu einem Koeffizient addiert und 1 von den anderen subtrahiert wird). Das entspricht einer Kreuzung der Stränge i und $i + 1$. Sei $t \in [0, 1]$, so dass $\gamma(t) \in C_i + iV_i^{0+}$. Bezeichne mit y den Imaginärteil von $\gamma(t)$. Es gilt $y \in V_i^{0+}$, sodass $y_i > y_{i+1}$. Folglich: $\exp(2i\pi y_i) = \exp(-2\pi y_i) <$

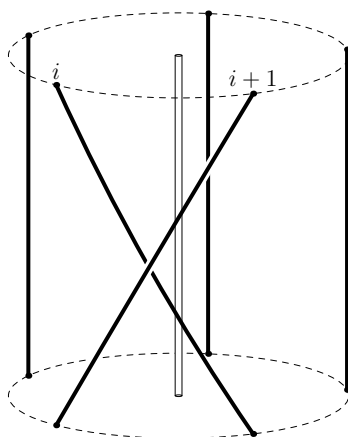


Abbildung 6: Zopf s_i

$\exp(-2\pi y_{i+1}) = \exp(2i\pi y_{i+1})$, was bedeutet, während der Kreuzung läuft der i -te Strang näher am Ursprung als der $(i+1)$ -te Strang. \square

Es wird dann leicht geprüft, dass die Aktion von u auf $\pi_1(A, p)$ durch $u s_i u^{-1} = s_{i-1}$ gegeben wird (siehe Abb. 7). Daher kommt die Präsentation vom Satz 18.

4 Eine andere Präsentation von $\pi_1(Y/W)$

Bevor wir das Hauptresultat dieser Sektion formulieren, interessieren wir uns für die starke Bindung zwischen einer Weylgruppe und ihrer Zopfgruppe.

Die endliche Weylgruppe $W_{\text{fin}} \simeq \mathfrak{S}_n$ besitzt folgende Präsentation durch Erzeuger und Relationen:

$$W_{\text{fin}} = \langle s_1, \dots, s_{n-1} ; s_i^2 = 1, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \text{ und } s_i s_j = s_j s_i \text{ für } |i - j| \geq 2 \rangle.$$

Die Präsentation der Zopfgruppe

$$\mathcal{B}_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} ; s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \text{ und } s_i s_j = s_j s_i \text{ für } |i - j| \geq 2 \rangle$$

ist also erhalten aus der Präsentation der endlichen Weylgruppe durch Entfernen der Relation $s_i^2 = 1$. Eine ähnliche Bindung existiert zwischen einer Präsentation der affinen Weylgruppe W und der Präsentation von $\pi_1(Y/W)$ (oder die von $\tilde{\mathcal{B}}_n$), die wir in den letzten Sektionen erstellt haben. Die Weylgruppe ist nämlich präsentiert durch

$$W = \langle (s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} ; \text{si } n > 2, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \\ s_i s_j = s_j s_i \text{ für } i - j \neq -1, 0, 1 \text{ und } s_i^2 = 1 \rangle$$

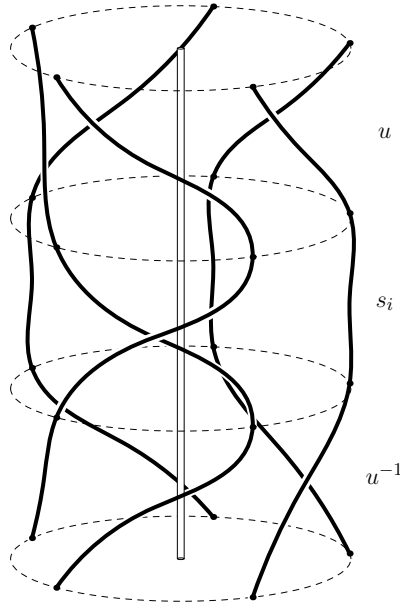


Abbildung 7: $us_iu^{-1} = s_{i-1}$

und es genügt noch, die Relation $s_i^2 = 1$ zu entfernen, um eine Präsentation von $\pi_1(Y/W)$ zu erhalten.

Außerdem haben wir bewiesen (Proposition 2) dass W ein semidirekt Produkt ist von W_{fin} und Q . Davon kann eine andere Präsentation von W erhalten werden. Die Erzeuger sind s_1, \dots, s_{n-1} (Erzeuger von W_{fin}) und t_1, \dots, t_{n-1} (Erzeuger von Q , wobei $t_i = \tau_{e_i - e_{i+1}}$ die Translation von Vektor $e_i - e_{i+1}$ ist) mit den Relationen

1. $s_i^2 = 1, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, s_i s_j = s_j s_i$ für $|i - j| \geq 2$,
2. $t_i t_j = t_j t_i$ für alle i und j ,
3. $s_i t_i = t_i^{-1} s_i, s_i t_{i+1} = t_{i+1} t_i s_i, s_{i+1} t_i = t_i t_{i+1} s_{i+1}, s_i t_j = t_j s_i$ für $|i - j| \geq 2$.

Mit den Relationen $s_i^2 = 1$ und $t_i t_j = t_j t_i$ können die Relationen 3 ersetzt werden durch

- 3'. $s_i t_i = t_i^{-1} s_i, s_i t_{i+1} = t_{i+1} t_i s_i^{-1}, s_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i s_{i+1}^{-1}, s_i t_j = t_j s_i$ pour $|i - j| \geq 2$.

Diese Präsentation kann selbst in eine Präsentation von $\pi_1(Y/W)$ verändert werden durch Entfernen einiger Relationen.

Satz 22. Die Gruppe $\pi_1(Y/W)$ ist präsentiert durch Erzeuger $s_1, \dots, s_{n-1}, t_1, \dots, t_{n-1}$ und Relationen 1, 2 und 3', ohne die Relationen $s_i^2 = 1$ und $s_i t_i = t_i^{-1} s_i$.

Beweis. Bezeichne zeitweise mit G die wie in dem Satz präsentierte Gruppe. Erinnerung, dass die Gruppe $\pi_1(Y/W)$ wie folgt präsentiert ist:

$$\pi_1(Y/W) = \langle (s_i)_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} ; \text{si } n > 2, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, \\ s_i s_j = s_j s_i \text{ pour } i - j \neq -1, 0, 1 \rangle.$$

Im folgenden identifizieren wir ein Element $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ mit dem kongruenten Element in $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Definiere die Gruppenhomomorphismen

$$\Phi : G \rightarrow \pi_1(Y/W) \\ s_i \mapsto s_i \\ t_i \mapsto s_{i+1}^{-1} \cdots s_{n-1}^{-1} s_0 \cdots s_{i-1} s_{i-2}^{-1} \cdots s_0^{-1} s_{n-1} \cdots s_i$$

und

$$\Psi : \pi_1(Y/W) \rightarrow G \\ s_i \mapsto s_i \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ s_0 \mapsto s_{n-1} \cdots s_2 t_1 s_1^{-1} \cdots s_{n-1}^{-1}$$

Es genügt zu prüfen, dass diese Morphismen wohl definiert sind, und dass sie Inverse ein voneinander sind. Um zu zeigen, dass Φ wohl definiert ist, genügt es zu zeigen: $\Phi(t_i)\Phi(t_j) = \Phi(t_j)\Phi(t_i)$ für alle i, j , $s_i\Phi(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_i^{-1}$, $s_{i+1}\Phi(t_i) = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_{i+1}^{-1}$ und $s_i\Phi(t_j) = \Phi(t_j)s_i$ für $|i-j| \geq 2$. Zur Vereinfachung bezeichne $S_{n \nearrow m}^+ = s_n s_{n+1} \cdots s_m$ falls $n \leq m$, $S_{n \searrow m}^+ = s_n s_{n-1} \cdots s_m$ falls $n \geq m$, ebenso $S_{n \nearrow m}^- = s_n^{-1} s_{n+1}^{-1} \cdots s_m^{-1}$ und $S_{n \searrow m}^- = s_n^{-1} s_{n-1}^{-1} \cdots s_m^{-1}$. Nach Konvention, $S_{n \nearrow m}^\pm = 1$ für $n > m$ und $S_{n \searrow m}^\pm = 1$ für $n < m$. Also $\Phi(t_i) = S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+$. Sei $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$. Zeige, dass $s_i\Phi(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_i^{-1}$. Es gilt

$$\Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_i^{-1} = S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-1 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+ S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+ s_i^{-1} \\ = S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+$$

und

$$s_i\Phi(t_{i+1}) = s_i S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-1 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+.$$

Das Element s_i kommutiert mit $s_{i+2}^{-1}, \dots, s_{n-1}^{-1}, s_0, \dots, s_{i-2}$ und so

$$s_i\Phi(t_{i+1}) = S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-2}^+ s_i s_{i-1} s_i S_{i-1 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+ \\ = S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-2}^+ s_{i-1} s_i s_{i-1} S_{i-1 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+ \\ = S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+ = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_i^{-1}.$$

Folglich $s_i\Phi(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_i^{-1}$. Zeige, dass $s_{i+1}\Phi(t_i) = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_{i+1}^{-1}$. Einerseits

$$\Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_{i+1}^{-1} = S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-1 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i+1}^+ S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+ s_{i+1}^{-1} \\ = S_{i+2 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+ s_{i+1}^{-1},$$

andererseits

$$\begin{aligned}
s_{i+1}\Phi(t_i) &= S_{i+2}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_{i-1} S_{i-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_i \\
&= S_{i+2}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_i s_i^{-1} S_{i-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_i \\
&= S_{i+2}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_i S_{i-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_{i+2} s_i^{-1} s_{i+1} s_i \\
&= S_{i+2}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_i S_{i-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_i s_{i+1}^{-1} = \Phi(t_{i+1})\Phi(t_i)s_{i+1}^{-1}
\end{aligned}$$

denn s_i^{-1} kommutiert mit $s_{i-2}, \dots, s_0, s_{n-1}, \dots, s_{i+2}$ und die Relation $s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}$ ist äquivalent zu $s_i^{-1} s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}^{-1}$.

Seien nun $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, so dass $|i - j| \geq 2$. Umzuzeigen, dass $s_i \Phi(t_j) = \Phi(t_j) s_i$, nehme zunächst an, dass $i > j$. Dann

$$\begin{aligned}
s_i \Phi(t_j) &= s_i S_{j+1}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_{j-1} S_{j-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_j \\
&= S_{j+1}^- \nearrow_{i-2} s_i s_{i-1} s_i S_{i+1}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_{j-1} S_{j-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_j \\
&= S_{j+1}^- \nearrow_{i-2} s_{i-1} s_i s_{i-1} S_{i+1}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_{j-1} S_{j-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_j \\
&= S_{j+1}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_{j-1} S_{j-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_{i+1} s_{i-1} s_i s_{i-1} S_{i-2}^- \searrow_j \\
&= S_{j+1}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_{j-1} S_{j-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_{i+1} s_i s_{i-1} s_i S_{i-2}^- \searrow_j \\
&= S_{j+1}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_{j-1} S_{j-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_j s_i = \Phi(t_j) s_i.
\end{aligned}$$

Falls $i < j$,

$$\begin{aligned}
s_i \Phi(t_j) &= s_i S_{j+1}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_{j-1} S_{j-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_j \\
&= S_{j+1}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_{i-2} s_i s_{i-1} s_i S_{i+1}^- \nearrow_{j-1} S_{j-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_j \\
&= S_{j+1}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_{i-2} s_{i-1} s_i s_{i-1} S_{i+1}^- \nearrow_{j-1} S_{j-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_j \\
&= S_{j+1}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_{j-1} S_{j-2}^- \searrow_{i+1} s_{i-1} s_i s_{i-1} S_{i-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_j \\
&= S_{j+1}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_{j-1} S_{j-2}^- \searrow_{i+1} s_i s_{i-1} s_i S_{i-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_j \\
&= S_{j+1}^- \nearrow_{n-1} S_0^+ \nearrow_{j-1} S_{j-2}^- \searrow_0 S_{n-1}^+ \searrow_j s_i = \Phi(t_j) s_i.
\end{aligned}$$

In beiden Fällen gilt wohl $s_i \Phi(t_j) = \Phi(t_j) s_i$.

Wir sollen noch zeigen, dass $\Phi(t_i)\Phi(t_j) = \Phi(t_j)\Phi(t_i)$ für alle $i, j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Die Berechnung ist besonders lang, deswegen stellen wir sie im Anhang in der Untersektion 4.1 aus.

Um zu zeigen, dass Ψ wohl definiert ist, genügt es zu zeigen, dass $s_{n-1}\Psi(s_0)s_{n-1} = \Psi(s_0)s_{n-1}\Psi(s_0)$ (oder äquivalent $s_{n-1}^{-1}\Psi(s_0)s_{n-1} = \Psi(s_0)s_{n-1}\Psi(s_0)^{-1}$), dass $s_1\Psi(s_0)s_1 = \Psi(s_0)s_1\Psi(s_0)$ (oder äquivalent $s_1^{-1}\Psi(s_0)s_1 = \Psi(s_0)s_1\Psi(s_0)$), und dass $\Psi(s_0)$ mit jedem s_j kommutiert für $j \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$. Wir werden jetzt zeigen, dass $s_{n-1}^{-1}\Psi(s_0)s_{n-1} = \Psi(s_0)s_{n-1}\Psi(s_0)^{-1}$. Die linke Seite ist gleich

$$s_{n-1}^{-1}\Psi(s_0)s_{n-1} = S_{n-2}^+ \searrow_2 t_1 S_1^- \nearrow_{n-2}.$$

Denn

$$\begin{aligned}
S_{1 \nearrow n-2}^- S_{n-1 \searrow 1}^+ &= S_{1 \nearrow n-3}^- s_{n-2}^{-1} s_{n-1} s_{n-2} S_{n-3 \searrow 1}^+ \\
&= S_{1 \nearrow n-3}^- s_{n-1} s_{n-2} s_{n-1}^{-1} S_{n-3 \searrow 1}^+ \\
&= s_{n-1} S_{1 \nearrow n-3}^- s_{n-2} S_{n-3 \searrow 1}^+ s_{n-1}^{-1}
\end{aligned}$$

und durch das gleiche Verfahren erhalten wir die obige Relation. Es gilt auch

$$S_{n-1 \searrow 2}^+ S_{n-1 \searrow 3}^+ s_2^{-1} = S_{n-2 \searrow 2}^+ S_{n-1 \searrow 3}^+,$$

denn s_{n-1} kommutiert mit s_2, \dots, s_{n-3} , sodass

$$\begin{aligned}
S_{n-1 \searrow 2}^+ S_{n-1 \searrow 3}^+ s_2^{-1} &= s_{n-1} s_{n-2} s_{n-1} S_{n-3 \searrow 2}^+ S_{n-2 \searrow 3}^+ s_2^{-1} \\
&= s_{n-2} s_{n-1} s_{n-2} S_{n-3 \searrow 2}^+ S_{n-2 \searrow 3}^+ s_2^{-1} = s_{n-2} S_{n-1 \searrow 2}^+ S_{n-2 \searrow 3}^+ s_2^{-1}
\end{aligned}$$

und bei der „Umstellung“ von s_{n-2}, \dots, s_3 erhalten wir

$$S_{n-1 \searrow 2}^+ S_{n-1 \searrow 3}^+ s_2^{-1} = S_{n-2 \searrow 2}^+ S_{n-1 \searrow 2}^+ s_2^{-1} = S_{n-2 \searrow 2}^+ S_{n-1 \searrow 3}^+.$$

Mit den Relationen, die G definieren, und den obigen Relationen, gilt

$$\begin{aligned}
\Psi(s_0) s_{n-1} \Psi(s_0)^{-1} &= S_{n-1 \searrow 2}^+ t_1 S_{1 \nearrow n-2}^- S_{n-1 \searrow 1}^+ t_1^{-1} S_{2 \nearrow n-1}^- \\
&= S_{n-1 \searrow 2}^+ t_1 S_{n-1 \searrow 1}^+ S_{2 \nearrow n-1}^- t_1^{-1} S_{2 \nearrow n-1}^- \\
&= S_{n-1 \searrow 2}^+ S_{n-1 \searrow 3}^+ t_1 s_2 s_1 s_2^{-1} t_1^{-1} S_{3 \nearrow n-1}^- S_{2 \nearrow n-1}^- \\
&= S_{n-1 \searrow 2}^+ S_{n-1 \searrow 3}^+ s_2^{-1} t_2 t_1 s_1 t_1^{-1} t_2^{-1} s_2 S_{3 \nearrow n-1}^- S_{2 \nearrow n-1}^- \\
&= S_{n-1 \searrow 2}^+ S_{n-1 \searrow 3}^+ s_2^{-1} t_2 t_1 t_2^{-1} s_1^{-1} s_2 S_{3 \nearrow n-1}^- S_{2 \nearrow n-1}^- \\
&= S_{n-1 \searrow 2}^+ S_{n-1 \searrow 3}^+ s_2^{-1} t_1 s_1^{-1} s_2 S_{3 \nearrow n-1}^- S_{2 \nearrow n-1}^- \\
&= S_{n-2 \searrow 2}^+ S_{n-1 \searrow 3}^+ t_1 s_1^{-1} S_{3 \nearrow n-1}^- S_{2 \nearrow n-2}^- \\
&= S_{n-2 \searrow 2}^+ t_1 s_1^{-1} S_{n-1 \searrow 3}^+ S_{3 \nearrow n-1}^- S_{2 \nearrow n-2}^- \\
&= S_{n-2 \searrow 2}^+ t_1 s_1^{-1} S_{2 \nearrow n-2}^- = s_{n-1}^{-1} \Psi(s_0) s_{n-1}.
\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass $s_1^{-1} \Psi(s_0) s_1 = \Psi(s_0) s_1 \Psi(s_0)$. Einerseits

$$\begin{aligned}
s_1^{-1} \Psi(s_0) s_1 &= s_1^{-1} S_{n-1 \searrow 2}^+ t_1 S_{1 \nearrow n-1}^- s_1 \\
&= s_1^{-1} S_{n-1 \searrow 3}^+ s_2 t_1 S_{1 \nearrow n-1}^- s_1 \\
&= s_1^{-1} S_{n-1 \searrow 3}^+ t_2 t_1 s_2^{-1} S_{1 \nearrow n-1}^- s_1 \\
&= S_{n-1 \searrow 3}^+ s_1^{-1} t_2 t_1 s_2^{-1} s_1^{-1} s_2^{-1} s_1 S_{3 \nearrow n-1}^- \\
&= S_{n-1 \searrow 3}^+ s_1^{-1} t_2 t_1 s_1^{-1} s_2^{-1} S_{3 \nearrow n-1}^- \\
&= S_{n-1 \searrow 3}^+ t_2 s_1 s_1^{-1} s_2^{-1} S_{3 \nearrow n-1}^- \\
&= S_{n-1 \searrow 3}^+ t_2 S_{2 \nearrow n-1}^-.
\end{aligned}$$

Andererseits

$$\begin{aligned}
\Psi(s_0)s_1\Psi(s_0) &= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- s_1 S_{n-1\setminus 1}^+ t_1^{-1} S_{2\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- S_{n-1\setminus 3}^+ s_1 s_2 s_1 t_1^{-1} S_{2\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 s_1^{-1} s_2^{-1} s_1 s_2 s_1 t_1^{-1} S_{2\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 s_2 t_1^{-1} S_{2\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus 2}^+ s_2^{-1} t_2 t_1 t_1^{-1} S_{2\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus 3}^+ t_2 S_{2\setminus n-1}^- = s_1^{-1} \Psi(s_0) s_1.
\end{aligned}$$

Wir zeigen schließlich, dass $\Psi(s_0)$ mit $s_j, j \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket$ kommutiert:

$$\begin{aligned}
\Psi(s_0)s_j &= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- s_j \\
&= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus j+1}^- s_j S_{j+2\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus j-1}^- s_{j+1} S_{j\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus j}^+ s_{j+1} S_{j-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- \\
&= S_{n-1\setminus j+2}^+ s_j S_{j+1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- \\
&= s_j S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- = s_j \Psi(s_0).
\end{aligned}$$

Daher ist Ψ wohl definiert. Bleibt zu zeigen, dass Φ und Ψ Inverse ein voneinander sind.

Für $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ gilt natürlich $\Phi \circ \Psi(s_i) = s_i$ und $\Psi \circ \Phi(s_i) = s_i$. Außerdem

$$\Phi \circ \Psi(s_0) = S_{n-1\setminus 2}^+ \Phi(t_1) S_{1\setminus n-1}^- = S_{n-1\setminus 2}^+ S_{2\setminus n-1}^- s_0 S_{n-1\setminus 1}^+ S_{1\setminus n-1}^- = s_0.$$

Bemerke, dass in G gilt $s_{i+1} t_i s_i^{-1} s_{i+1}^{-1} = t_{i+1} t_i s_{i+1}^{-1} s_i^{-1} s_{i+1}^{-1} = t_{i+1} t_i s_i^{-1} s_{i+1}^{-1} s_i^{-1} = s_i t_{i+1} s_{i+1}^{-1} s_i^{-1}$ und $t_{i+1} s_i t_i^{-1} = s_i^{-1} t_{i+1} t_i t_i^{-1} = s_i^{-1} t_{i+1}$ für alle $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$. Für alle $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ gilt

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \Phi(t_i) &= S_{i+1\setminus n-1}^- \Psi(s_0) S_{1\setminus i-1}^+ S_{i-2\setminus 1}^- \Psi(s_0)^{-1} S_{n-1\setminus i}^+ \\
&= S_{i+1\setminus n-1}^- S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- S_{1\setminus i-1}^+ S_{i-2\setminus 1}^- S_{n-1\setminus 1}^+ t_1^{-1} S_{2\setminus n-1}^- S_{n-1\setminus i}^+ \\
&= S_{i\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus n-1}^- S_{1\setminus i-1}^+ S_{i-2\setminus 1}^- S_{n-1\setminus 2}^+ t_1 S_{1\setminus i-1}^- \\
&= S_{i\setminus 3}^+ s_2 t_1 s_1^{-1} s_2^{-1} S_{3\setminus n-1}^- S_{1\setminus i-1}^+ S_{i-2\setminus 1}^- S_{n-1\setminus 3}^+ s_2 s_1 t_1^{-1} s_2^{-1} S_{3\setminus i-1}^- \\
&= S_{i\setminus 3}^+ s_1 t_2 s_2^{-1} s_1^{-1} S_{3\setminus n-1}^- S_{1\setminus i-1}^+ S_{i-2\setminus 1}^- S_{n-1\setminus 3}^+ s_1 s_2 t_2^{-1} s_1^{-1} S_{3\setminus i-1}^- \\
&= s_1 S_{i\setminus 3}^+ t_2 s_2^{-1} S_{3\setminus n-1}^- S_{2\setminus i-1}^+ S_{i-2\setminus 2}^- S_{n-1\setminus 3}^+ s_2 t_2^{-1} S_{3\setminus i-1}^- s_1^{-1}
\end{aligned}$$

und dann, mit ähnlichen Operationen,

$$\begin{aligned}
\Psi \circ \Phi(t_i) &= S_{1\setminus i-1}^+ t_i s_i^{-1} S_{i+1\setminus n-1}^- S_{n-1\setminus i}^+ s_{i-1} t_{i-1}^{-1} S_{i-2\setminus 1}^- \\
&= S_{1\setminus i-1}^+ t_i s_{i-1} t_{i-1}^{-1} S_{i-2\setminus 1}^- \\
&= S_{1\setminus i-1}^+ s_{i-1}^{-1} t_i S_{i-2\setminus 1}^- = t_i.
\end{aligned}$$

Und schließlich $\Phi \circ \Psi = \text{Id}_{\pi_1(Y/W)}$ und $\Psi \circ \Phi = \text{Id}_G$. □

Aus dieser Präsentation von $\pi_1(Y/W)$ konnten wir wie in der letzten Sektion eine zweite Präsentation von $\tilde{\mathcal{B}}_n$ finden. Es würde genügen, zu bestimmen, wie u durch Konjugation auf den t_i operiert. Diese Aktion ist jedoch eher kompliziert, deswegen führen wir diese Analyse hier nicht aus. Es ist trotzdem interessant, die Erzeuger t_i als Zopf zu interpretieren.

Erinnere, dass t_i der Translation von Vektor $e_i - e_{i+1}$ entspricht. Also wird $t_i \in \pi_1(Y/W)$ in eine Schleife von Y hochgehoben, die einen Punkt p mit dem Punkt p' , erhalten von p bei Addition von 1 an die i -te Koordinate und bei Subtraktion von 1 an die $(i + 1)$ -te Koordinate, verbindet. Als Zopf ist t_i also so, dass der i -te Strang die zentrale Achse ein Mal umringt und nach i wiederkommt, und der $(i + 1)$ -te Strang auch die zentrale Achse ein Mal umringt und nach $i + 1$ wiederkommt, aber dreht sich in die andere Richtung. Dennoch genügt diese Beschreibung nicht zu wissen, wie jeder diese Stränge die andere Stränge kreuzt.

Eigentlich wissen wir schon, welchen Zöpfen die s_i entsprechen, so reicht es, folgende Relation zu nützen:

$$t_i = s_{i+1}^{-1} \cdots s_{n-1}^{-1} s_0 \cdots s_{i-1} s_{i-2}^{-1} \cdots s_0^{-1} s_{n-1} \cdots s_i.$$

Es folgt daraus:

- der $(i + 1)$ -te Strang geht unter den Strängen $i + 2, \dots, n$ dann über die Stränge $1, \dots, i$,
- der i -te Strang geht über die Stränge $i - 1, \dots, 1$ dann unter den Strängen $n, \dots, i + 1$.

Die Abbildungen 8 und 9 zeigen die Zöpfe t_2 und t_4 , in dem Fall $n = 6$.

4.1 Anhang: Berechnung der Relation $\Phi(t_i)\Phi(t_j) = \Phi(t_j)\Phi(t_i)$

Die Notationen sind die selben, wie im Beweis des Satzes 22. Wir bewiesen hier die Relation $\Phi(t_i)\Phi(t_j) = \Phi(t_j)\Phi(t_i)$ für alle $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. OBdA kann man $i < j$ annehmen. Manche Schritte dieser Berechnung sind in einigen Grenzfälle wie $i = 1$ oder $j = i + 1$ nicht gültig. Als Vereinfachung beweisen wir nicht diese Spezialfälle. Es genügt dafür, unsere Berechnung ein bisschen umzustellen. Es gilt

$$\begin{aligned} \Phi(t_i)\Phi(t_j) &= S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+ S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ \\ &= S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ S_{j-1 \searrow i}^+ S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{i-1 \nearrow j-1}^- S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+. \end{aligned}$$

Da s_k und s_l für $|k - l| > 1$ kommutieren (außer s_0 und s_{n-1}), kommutieren genauso $S_{j-1 \searrow i}^+$ und $S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-2}^+$. Der obige Term ist also gleich

$$S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{j-1 \searrow i}^+ S_{i-1 \nearrow j-1}^- S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+.$$

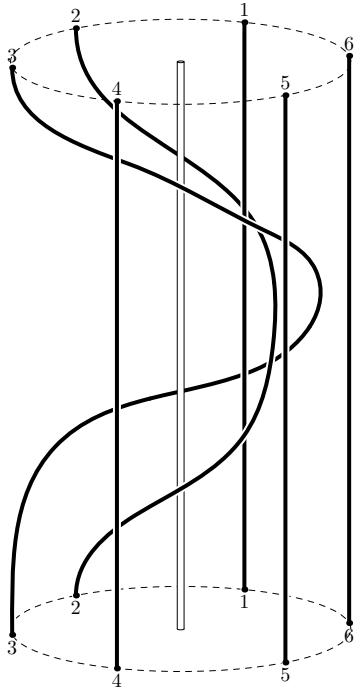


Abbildung 8: t_2

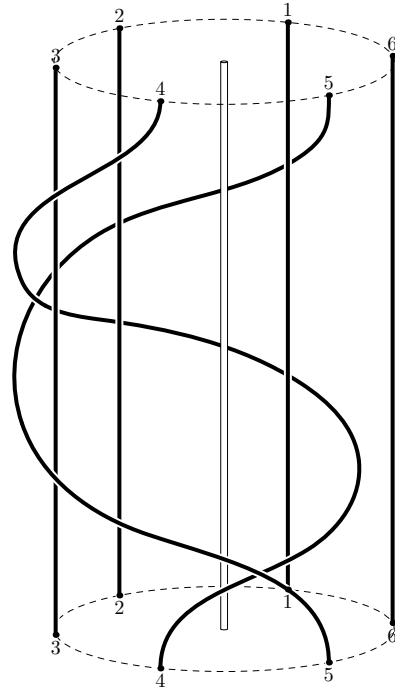


Abbildung 9: t_4

Durch mehrmaliges Anwenden von Relationen der Art $s_l s_{l+1} s_l = s_{l+1} s_l s_{l+1}$ (oder $s_{n-1} s_0 s_{n-1} = s_0 s_{n-1} s_0$) zeigen wir

$$S_{i-2 \setminus 0}^- S_{n-1 \setminus j}^+ S_{j+1 \setminus n-1}^- S_{0 \setminus i-2}^+ = S_{j \setminus n-2}^- s_{n-1} S_{0 \setminus i-2}^+ S_{i-3 \setminus 0}^- s_{n-1}^- S_{n-2 \setminus j}^+$$

und $S_{j-1 \setminus i}^+ S_{i-1 \setminus j-1}^+ = S_{i-1 \setminus j-2}^+ S_{j-1 \setminus i-1}^+$. So kann man $\Phi(t_i)\Phi(t_j)$ so umschreiben:

$$S_{i+1 \setminus n-1}^- S_{0 \setminus i-1}^+ S_{j \setminus n-2}^- s_{n-1} S_{0 \setminus i-2}^+ S_{i-3 \setminus 0}^- s_{n-1}^- S_{n-2 \setminus j}^+ \\ S_{i-1 \setminus j-2}^+ S_{j-1 \setminus i-1}^+ S_{j-2 \setminus 0}^- S_{n-1 \setminus j}^+.$$

In diesem letzten Term kommutieren $S_{i-3 \setminus 0}^- s_{n-1}^- S_{n-2 \setminus j}^+$ und $S_{i-1 \setminus j-2}^+$ und wir erhalten

$$S_{i+1 \setminus n-1}^- S_{0 \setminus i-1}^+ S_{j \setminus n-2}^- s_{n-1} S_{0 \setminus i-2}^+ S_{i-1 \setminus j-2}^+ S_{i-3 \setminus 0}^- s_{n-1}^- S_{n-2 \setminus j}^+ \\ S_{j-1 \setminus i-1}^+ S_{j-2 \setminus 0}^- S_{n-1 \setminus j}^+. \quad (1)$$

Wir fangen mit dem linken Teil an, das heißt mit:

$$S_{i+1 \setminus n-1}^- S_{0 \setminus i-1}^+ S_{j \setminus n-2}^- s_{n-1} S_{0 \setminus i-2}^+ S_{i-1 \setminus j-2}^+.$$

Die Elemente des Blocks $S_{0 \setminus i-1}^+$ kommutieren mit den vorigen Elementen bis sie sich hineinschieben zwischen die Elemente des Blocks $s_{n-1} S_{0 \setminus i-2}^+$:

$$S_{i+1 \setminus n-1}^- S_{j \setminus n-2}^- s_0 s_{n-1} s_1 s_0 \cdots s_{i-3} s_{i-1} s_{i-2} S_{i-1 \setminus j-2}^+.$$

Dann kann man $s_{i-1}s_{i-2}s_{i-1}$ in $s_{i-2}s_{i-1}s_{i-2}$ verändern. Dabei erscheint eine Kette $s_{i-2}s_{i-3}s_{i-2}$, die man in $s_{i-3}s_{i-2}s_{i-3}$ verändern kann, und so weiter. Wir erhalten schließlich

$$S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{j \nearrow n-2}^- s_{n-1} s_0 s_{n-1} s_1 s_0 \cdots s_{i-3} s_{i-1} s_{i-2} S_{i \nearrow j-2}^+$$

Das Element s_j^{-1} des Blocks $S_{j \nearrow n-2}^-$ kommutiert mit allen vorigen Elementen bis s_{j+1}^{-1} . Dann gibt es eine Kette $s_j^{-1} s_{j+1}^{-1} s_j^{-1}$, die in $s_{j+1}^{-1} s_j^{-1} s_{j+1}^{-1}$ verändert wird. Das Linkselement s_{j+1}^{-1} kommutiert also seinerseits mit den vorigen Elementen und kommt an den ganz Anfang der Kette. Wir verfahren ebenso mit $s_{j+1}^{-1}, \dots, s_{n-2}^{-1}$ und wir erhalten

$$S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{i+1 \nearrow n-1}^- s_{n-1} s_0 s_{n-1} s_1 s_0 \cdots s_{i-3} s_{i-1} s_{i-2} S_{i \nearrow j-2}^+$$

Dann kürzen sich ein s_{n-1}^{-1} und ein s_{n-1} , und wir erhalten

$$S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{i+1 \nearrow n-2}^- s_0 s_{n-1} s_1 s_0 \cdots s_{i-3} s_{i-1} s_{i-2} S_{i \nearrow j-2}^+$$

Zu diesem Punkt kommutieren die hineingeschoben Elemente mit den vorigen und der Term wird so umgeschrieben:

$$S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i+1 \nearrow n-2}^- s_{n-1} S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{i \nearrow j-2}^+$$

Kümmern wir uns jetzt um den rechten Teil von (1). Er ist gleich

$$S_{i-3 \searrow 0}^- s_{n-1}^{-1} S_{n-2 \searrow j}^+ S_{j-1 \searrow i-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+$$

Wir bearbeiten jetzt ähnlich wie für den letzten Teil: den Anfang der Kette $S_{j-2 \searrow 0}^-$, das heißt $S_{j-2 \searrow j}^-$, zwischen die Kette $S_{j-1 \searrow i-1}^+$ hineinschreiben, dann die Relationen der Art $s_k s_{k+1} s_k = s_{k+1} s_k s_{k+1}$ nützen, was ein $s_{j-2} s_{j-2}^{-1}$ eliminiert, und die erhaltene Kette herausschieben. Wir erhalten

$$S_{i-3 \searrow 0}^- s_{n-1}^{-1} S_{n-2 \searrow j-1}^+ S_{j-3 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ S_{j-2 \searrow i}^+$$

und deshalb

$$\begin{aligned} \Phi(t_i)\Phi(t_j) &= S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i+1 \nearrow n-2}^- s_{n-1} S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{i \nearrow j-2}^+ \\ &\quad S_{i-3 \searrow 0}^- s_{n-1}^{-1} S_{n-2 \searrow j-1}^+ S_{j-3 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ S_{j-2 \searrow i}^+. \end{aligned} \quad (2)$$

Schreibe nun

$$\Phi(t_j)\Phi(t_i) = S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow j-1}^+ S_{j-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ S_{i+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i-2 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow i}^+$$

Ähnlich wird bewiesen

$$\begin{aligned} \Phi(t_j)\Phi(t_i) &= S_{j+1 \nearrow n-1}^- S_{0 \nearrow i-1}^+ S_{i+1 \nearrow n-2}^- s_{n-1} S_{0 \nearrow i-2}^+ S_{i \nearrow j-2}^+ \\ &\quad S_{i-3 \searrow 0}^- s_{n-1}^{-1} S_{n-2 \searrow j-1}^+ S_{j-3 \searrow 0}^- S_{n-1 \searrow j}^+ S_{j-2 \searrow i}^+, \end{aligned} \quad (3)$$

und beim Vergleichen von (2) und (3) zeigt es sich, dass $\Phi(t_i)\Phi(t_j) = \Phi(t_j)\Phi(t_i)$.

Literatur

- [1] JOAN S. BIRMAN, *Braids, links, and mapping class groups*, Annals of mathematics studies, Princeton university press, 1974
- [2] BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4-6, *Éléments de mathématique* XXXIV, Hermann, 1968
- [3] HARM VAN DER LEK, The homotopy type of complex hyperplane complements, 1983
- [4] NGUYỄN VIỆT DŨNG, *The fundamental groups of the spaces of regular orbits of the affine Weyl groups*, Topology Vol. 22, No. 4, pp. 425-435, 1983