

Sur la généricité des tresses pseudo-anosoviennes I : tresses rigides

Sandrine Caruso

14 juin 2013

1 Introduction

Lorsque l'on s'intéresse à la classification de Nielsen-Thurston des groupes de tresses, il est naturel de se demander de quel type aura le plus de chances d'être une tresse tirée « au hasard ». Le sens que nous donnons à cette question dans cet article est le suivant. On s'intéresse au graphe de Cayley du groupe de tresses, avec pour partie génératrice l'ensemble des tresses simples (cet ensemble de générateurs est notamment très important lorsque l'on voit les groupes de tresses comme groupes de Garside). Une conjecture bien connue depuis les travaux de Thurston est la suivante.

Conjecture. *La proportion de tresses pseudo-anosoviennes dans la boule de rayon l dans le graphe de Cayley tend vers 1 lorsque l tend vers l'infini.*

Jusqu'à présent, les meilleurs résultats allant dans ce sens étaient, à notre connaissance, l'article classique de Fathi [9], et l'article de Atalan et Korkmaz [1] qui traite le cas des tresses à 3 brins. Le présent document est la première partie d'un travail en deux articles, dont la seconde partie est l'article en préparation [4]. Nous introduisons ici des outils essentiels qui nous permettront de démontrer la conjecture ci-dessus dans [4].

Outre l'introduction de ces outils, nous démontrons un résultat concernant la proportion de tresses *rigides* pseudo-anosoviennes (voir corollaire 4.8).

Théorème. *Pour l assez grand, dans la boule de rayon l dans le graphe de Cayley, la proportion de tresses rigides pseudo-anosoviennes est minorée indépendamment de l par une constante strictement positive.*

Les étapes principales de la démonstration consistent à montrer que la proportion des tresses rigides est bornée indépendamment de l , et que parmi les tresses rigides, la proportion de tresses pseudo-anosoviennes tend vers 1.

Signalons que la question initiale peut être interprétée de différentes manières. Les travaux de Maher [12] et Sisto [13] ont pour objet l'étude de tresses obtenues par une

marche aléatoire dans un graphe de Cayley. Ils montrent que, dans ce cadre aussi, la probabilité qu'une tresse est pseudo-anosovienne tend vers 1 lorsque la longueur de la marche aléatoire tend vers l'infini.

Remerciements. Je remercie mon directeur de thèse Bert Wiest, pour son aide et ses conseils, ainsi que Xavier Caruso pour nos discussions fructueuses, et Juan González-Meneses pour sa relecture attentive et ses remarques constructives.

2 Définitions

Dans tout l'article, on se donne un entier $n \geq 3$. Toutes les tresses considérées seront des tresses à n brins.

2.1 Structure de Garside

Sur la théorie de Garside, on pourra consulter la référence [7], ou encore [8]. Nous en rappelons ici quelques éléments utiles pour la suite.

Tandis que le groupe \mathcal{B}_n admet la présentation de groupes

$$\mathcal{B}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ et } \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |i - j| \geq 2 \rangle,$$

le monoïde des *tresses positives* \mathcal{B}_n^+ , qui est plongé dans \mathcal{B}_n , est défini par la même présentation, interprétée comme présentation de monoïdes.

Pour $i < j \leq n$, on note Δ_{ij} l'élément de \mathcal{B}_n^+ défini par

$$\Delta_{ij} = (\sigma_i \cdots \sigma_{j-1})(\sigma_i \cdots \sigma_{j-2}) \cdots (\sigma_i \sigma_{i+1}) \sigma_i$$

et on notera $\Delta = \Delta_{1n} \in \mathcal{B}_n^+$.

La paire $(\mathcal{B}_n^+, \Delta)$ définit ce que l'on appelle une structure de Garside sur \mathcal{B}_n . Sans en donner la définition complète, voici quelques propriétés d'une telle structure. Le groupe \mathcal{B}_n est muni d'une relation d'ordre \preceq définie par $x \preceq y \Leftrightarrow x^{-1}y \in \mathcal{B}_n^+$. Si $x \preceq y$, on dit que x est un *préfixe* de y . Deux éléments $x, y \in \mathcal{B}_n$ ont un unique plus grand préfixe commun.

On définit également \succcurlyeq par $x \succcurlyeq y \Leftrightarrow xy^{-1} \in \mathcal{B}_n^+$. Remarquons que $x \succcurlyeq y$ n'est pas équivalent à $y \preceq x$.

Les éléments de l'ensemble $\{x \in \mathcal{B}_n, 1 \preceq x \preceq \Delta\}$ sont appelés *tresses simples*, ou *tresses de permutation*.

Proposition 2.1. *L'ensemble des tresses simples est en bijection avec l'ensemble \mathfrak{S}_n des permutations de n éléments, via la projection canonique de \mathcal{B}_n dans \mathfrak{S}_n .*

Définition 2.2 (pondération à gauche). Soient s_1, s_2 deux tresses simples dans \mathcal{B}_n . On dit que s_1 et s_2 sont pondérés à gauche, ou encore que le couple (s_1, s_2) est pondéré à gauche, s'il n'existe aucun générateur σ_i tel que $s_1 \sigma_i$ et $\sigma_i^{-1} s_2$ soient toutes les deux encore simples.

Définition 2.3 (ensemble de départ, ensemble d'arrivée). Soit $s \in B_n$ une tresse simple. On appelle *ensemble de départ de s* l'ensemble $S(s) = \{i, \sigma_i \prec s\}$ et *ensemble d'arrivée de s* l'ensemble $F(s) = \{i, s \succ \sigma_i\}$.

Remarque 2.4. Deux tresses simples s_1 et s_2 sont pondérées à gauche si et seulement si $S(s_2) \subset F(s_1)$.

Remarque 2.5. Soit s une tresse simple, et π la permutation associée à s . Alors $i \in S(s)$ si et seulement si $\pi(i) > \pi(i+1)$, et $i \in F(s)$ si et seulement si $\pi^{-1}(i) > \pi^{-1}(i+1)$.

Proposition 2.6. Soit $x \in \mathcal{B}_n$. Il existe une unique décomposition $x = \Delta^p x_1 \cdots x_r$ tels que x_1, \dots, x_r sont des éléments simples distincts de Δ et de 1, et tels que pour tout $i = 1, \dots, r-1$, x_i et x_{i+1} sont pondérés à gauche.

Définition 2.7 (forme normale à gauche). Dans la proposition précédente, l'écriture $x = \Delta^p x_1 \cdots x_r$ s'appelle *forme normale à gauche* de x , p est appelé l'*infimum* de x et noté $\inf x$, $p+r$ est le *suprémum* de x et noté $\sup x$, et r est appelé *longueur canonique* de x .

En outre, si $r \geq 1$, on note $\iota(x) = \Delta^p x_1 \Delta^{-p}$ le *facteur initial* de x ($\iota(x) = x_1$ si p est pair, $\iota(x) = \Delta x_1 \Delta^{-1}$ si p est impair), et $\phi(x) = x_r$ son *facteur final*.

Définition 2.8 (rigidité). Une tresse x de longueur canonique strictement positive est dite *rigide* si $\phi(x)$ et $\iota(x)$ sont pondérés à gauche.

2.2 Tresses et groupe modulaire du disque épointé

Définition 2.9 (groupe modulaire du disque épointé). On note D_n le disque unité fermé dans \mathbb{C} auquel on a enlevé n points régulièrement espacés sur l'axe réel. Le *groupe modulaire* de D_n , noté $\text{Mod}(D_n)$, est le groupe des homéomorphismes de D_n quotienté par la relation d'isotopie. On note également $\text{Mod}(D_n, \partial D_n)$ le groupe des homéomorphismes de D_n fixant point par point le bord ∂D_n de D_n , quotienté par la relation d'isotopie.

Le groupe des tresses à n brins d'Artin est isomorphe au groupe $\text{Mod}(D_n, \partial D_n)$.

Rappelons que le théorème de classification de Nielsen-Thurston affirme qu'un élément $f \in \text{Mod}(D_n)$ est soit périodique, soit réductible non périodique, soit pseudo-anosovien. Une tresse $x \in \text{Mod}(D_n, \partial D_n)$ peut être projetée en un élément de $\text{Mod}(D_n)$. On appelle *type de Nielsen-Thurston de x* le type de Nielsen-Thurston de son projeté. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la définition de *périodique* est alors transformée comme suit : une tresse $x \in \mathcal{B}_n$ est périodique si et seulement si il existe des entiers non nuls m et l tels que $x^m = \Delta^l$, où $\Delta = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$ (Δ correspond au demi-twist autour du bord du disque).

2.3 Courbes rondes et presque rondes

Considérons une tresse comme un élément du groupe modulaire $\text{Mod}(D_n, \partial D_n)$.

Définition 2.10 (courbe). On appelle *courbe fermée* dans D_n l'image du cercle \mathbb{S}^1 par une application continue à valeurs dans D_n . La courbe est dite *simple* si cette application est injective. Elle est *non dégénérée* si elle n'est homotope ni à un point, ni au bord du disque, et qu'elle entoure au moins deux trous.

Dans la suite, on appellera simplement courbe une classe d'homotopie de courbe fermée simple non dégénérée.

Définition 2.11 (courbe ronde). On dit qu'une courbe est *ronde* si elle est homotope dans D_n à un cercle.

Définition 2.12 (courbe presque ronde). On dit qu'une courbe est *presque ronde* si elle n'est pas ronde et est l'image par une tresse simple d'une courbe ronde.

3 Propriétés du graphe de pondération à gauche

Définition 3.1 (graphe de pondération à gauche). On appelle *graphe de pondération à gauche*, noté G_{pg} , le graphe orienté fini suivant. Les sommets sont indexés par les tresses simples autres que 1 et Δ , et il existe une arête du sommet x_1 vers le sommet x_2 si et seulement si le couple (x_1, x_2) est pondéré à gauche.

On appelle *chemin* une suite $(x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_l)$ telle qu'il y a une arête du sommet x_i vers le sommet x_{i+1} , et la *longueur* d'un tel chemin désignera le nombre d'arêtes dans ce chemin.

L'objectif de cette section est d'étudier quelques propriétés du graphe G_{pg} , notamment des propriétés asymptotiques des chemins de longueur l , avec l tendant vers l'infini. On introduit les notations suivantes, pour tout $l \in \mathbb{N}^*$:

- $N(l)$ est le nombre de chemins $(x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_{l+1})$ de longueur l dans G_{pg} ;
- $N_o(l)$ désigne le nombre de boucles de longueur $l + 1$ avec extrémité marquée dans G_{pg} . On peut également voir $N_o(l)$ comme le nombre de chemins de longueur l tels qu'il y a une arête du dernier au premier sommet.
- Soit w un chemin de longueur $k \in \mathbb{N}^*$ dans G_{pg} . On note $N^{(w)}(l)$ le nombre de chemins de longueur l dans G_{pg} ne passant pas par w (*ie* ne contenant pas w comme sous-chemin), et $N_o^{(w)}(l)$ le nombre de boucles de longueur $l + 1$ avec extrémité marquée dans G_{pg} , ne passant pas par w .

D'autre part, si (u_l) et (v_l) sont deux suites de nombres réels, on note $u_l = \Theta(v_l)$ si et seulement si il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout l assez grand, $c_1 v_l < u_l < c_2 v_l$. On dira que u_l est de l'ordre de v_l .

On utilisera également les notations usuelles $u_l \sim v_l$ lorsque u_l est équivalent à v_l , c'est-à-dire lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier L tel que pour tout $l > L$, $|u_l - v_l| < \varepsilon |v_l|$, et $u_l = O(v_l)$ lorsqu'il existe $c_2 > 0$ telle que pour tout l assez grand, $u_l < c_2 v_l$.

Nous allons démontrer des propriétés du graphe de pondération à gauche en utilisant la notion de matrice d'adjacence. Pour plus de précisions sur la théorie des graphes et sur les matrices d'adjacence, le lecteur pourra consulter [11]. On rappelle la définition et la propriété suivantes, ainsi que le théorème de Perron-Frobénius.

Définition 3.2 (matrice d'adjacence). Soit G un graphe orienté fini, dont on numérote les sommets. On appelle *matrice d'adjacence* de G la matrice dont le coefficient (i, j) contient le nombre d'arêtes reliant le sommet i au sommet j .

Proposition 3.3. Soient G un graphe orienté fini et A sa matrice d'adjacence. Soit $l \in \mathbb{N}$. Le coefficient (i, j) de la matrice A^l contient le nombre de chemins de longueur l reliant le sommet i au sommet j .

Théorème (Perron-Frobénius). Soit A une matrice telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$, tel que A^k a tous ses coefficients strictement positifs. Alors le rayon spectral de A est strictement positif, est une valeur propre simple de A et est l'unique valeur propre de module maximal.

Lemme 3.4. Tout couple de sommets dans G_{pg} est relié par au moins un chemin de longueur exactement 5.

Démonstration. Rappelons que deux tresses simples s et t sont pondérées à gauche si et seulement si $S(t) \subset F(s)$. Soient s_1 et s_2 deux tresses simples différentes de 1 et Δ . Il existe i_1 et i_2 entre 1 et $n - 1$ tels que $F(s_1) \supset \{i_1\}$ et $S(s_2) \subset \{1, \dots, n - 1\} \setminus \{i_2\}$. Nous allons construire des tresses simples x_1, x_2, x_3, x_4 vérifiant :

- $S(x_1) = \{i_1\}$,
- $F(x_1) = S(x_2) = \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$,
- $F(x_2) = S(x_3) = \{1, 3, \dots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ (l'ensemble des nombres impairs entre 1 et $n - 1$),
- $F(x_3) = S(x_4) = \{1, \dots, n - 1\} \setminus \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$,
- $F(x_4) = \{1, \dots, n - 1\} \setminus \{i_2\}$.

Ainsi, $s_1 \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow s_2$ sera bien un chemin de longueur 5 dans le graphe G_{pg} .

Voici maintenant comment l'on choisit les tresses x_1, x_2, x_3, x_4 . On pose $x_1 = \sigma_{i_1} \cdots \sigma_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$. La tresse simple x_2 est celle qui correspond à la permutation suivante :

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 & \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 & \cdots & n \\ 2 & 4 & \cdots & 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor & 1 & 3 & \cdots & 2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1 \end{pmatrix}$$

La tresse x_3 , quant à elle, est égale à $\bar{x}_2 \Delta_{1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \Delta_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, n}$ où \bar{x}_2 est la tresse simple de permutation π_2^{-1} . Enfin, $x_4 = \Delta_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{-1} \cdots \sigma_{i_2}^{-1}$ est le complémentaire à gauche de $\sigma_{i_2} \cdots \sigma_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$. Les tresses x_1 à x_4 sont représentées pour $n = 6$ sur la figure 1.

On a bien $S(x_1) = \{i_1\}$ et $F(x_1) = \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Pour x_2 , la permutation π_2 est croissante sur $\{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ et sur $\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \dots, n\}$, et on a $\pi_2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) < \pi_2(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$, donc $S(x_2) =$

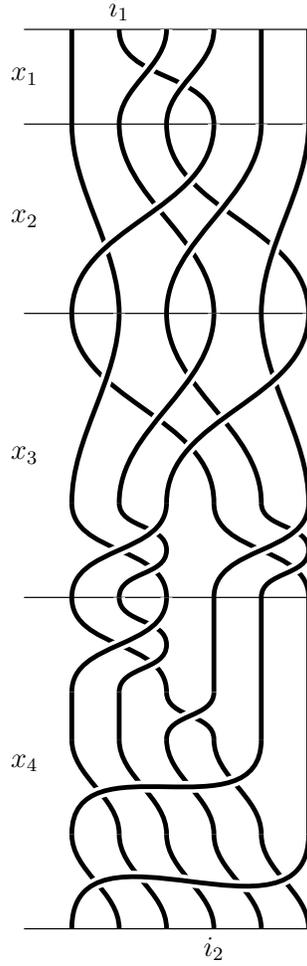


FIG. 1 – Tresses x_1 à x_4

$\{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. D'autre part, $\pi_2^{-1}(i) > \pi_2^{-1}(i+1)$ si et seulement si i est impair, d'où $F(x_2) = \{1, 3, \dots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$. La permutation π_3 associée à x_3 commence par appliquer π_2^{-1} , puis inverse l'ordre des éléments de 1 à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ d'une part, et de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ à n d'autre part. Il s'ensuit que, d'une part, $\pi_3(i) > \pi_3(i+1)$ si et seulement si i est impair, et que $\pi_3^{-1}(i) > \pi_3^{-1}(i+1)$ pour tout i sauf $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Donc $S(x_3) = \{1, 3, \dots, 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1\}$ et $F(x_3) = \{1, \dots, n-1\} \setminus \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Enfin, x_4 est le complémentaire à gauche de $\sigma_{i_2} \cdots \sigma_{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$, donc vérifie $S(x_4) = \{1, \dots, n-1\} \setminus \{n - \lceil \frac{n}{2} \rceil\} = \{1, \dots, n-1\} \setminus \{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$ et $F(x_4) = \{1, \dots, n-1\} \setminus \{i_2\}$. \square

Lemme 3.5. *On a les propriétés suivantes.*

- (i) *Il existe une constante λ telle que $N_{\circ}(l) \sim \lambda^{l+1}$.*

- (ii) On a $N(l) = \Theta(\lambda^l)$. En particulier, pour l assez grand, la proportion $N_o(l)/N(l)$ est minorée indépendamment de l par une constante strictement positive.
- (iii) Pour tout chemin w , il existe une constante $\mu_{(w)} < \lambda$ telle que $N^{(w)}(l) = O(\mu_{(w)}^l)$ et $N_o^{(w)}(l) = O(\mu_{(w)}^l)$.

Le lecteur pourra consulter [6], qui contient des résultats et démonstrations très proches de ceux de ce lemme.

Démonstration. Soit A la matrice d'adjacence du graphe G_{pg} . D'après la proposition 3.3, $N_o(l) = \text{tr}(A^{l+1})$ et $N(l) = |A^l|_1$, où $|\cdot|_1$ désigne la somme de tous les coefficients de la matrice.

(i) D'après le lemme 3.4, la matrice A^5 est une matrice à coefficients strictement positifs. On peut donc appliquer à A le théorème de Perron-Frobenius, et en déduire que A a une unique valeur propre de module maximal, celle-ci est réelle et strictement positive, et l'espace propre associé est de dimension 1. Notons λ cette valeur propre, et λ_i ($i = 1, \dots, n! - 3$) les autres (non nécessairement distinctes et non nécessairement réelles). On a $\text{tr}(A^{l+1}) = \lambda^{l+1} + \lambda_1^{l+1} + \dots + \lambda_{n!-3}^{l+1}$, d'où $N_o(l) \sim \lambda^{l+1}$ lorsque l tend vers l'infini.

(ii) Il existe une matrice inversible P telle que PAP^{-1} est sous forme de Jordan, et on peut calculer

$$|PA^lP^{-1}|_1 = \lambda^l + \sum p_i(\lambda_i)$$

où les p_i sont des polynômes de degré l . On en déduit, là encore, l'équivalence $|PA^lP^{-1}|_1 \sim \lambda^l$; d'autre part, $|PA^lP^{-1}|_1 = \Theta(|A^l|_1)$, donc $N(l) = \Theta(\lambda^l)$.

On en déduit que $N_o(l)/N(l) = \Theta(1)$, et en particulier que, pour l assez grand, ce rapport est minoré indépendamment de l par une constante strictement positive.

(iii) On construit à partir de G_{pg} un graphe $G_{pg}^{(k)}$ (où, rappelons-le, k est la longueur du chemin w) de la manière suivante : les sommets de $G_{pg}^{(k)}$ sont les chemins de longueur $k-1$ dans G_{pg} , et deux chemins $w_1 = (s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_k)$ et $w_2 = (t_1 \rightarrow \dots \rightarrow t_k)$ sont reliés par une arête si et seulement si $s_2 = t_1, s_3 = t_2, \dots, s_k = t_{k-1}$. Ainsi, les arêtes de $G_{pg}^{(k)}$ correspondent aux chemins de longueur k dans G_{pg} . On note A_k la matrice d'adjacence de $G_{pg}^{(k)}$.

Si s et t sont deux sommets de G_{pg} , se donner un chemin de longueur $l \geq k$ de s vers t dans G_{pg} revient à se donner un chemin de longueur $l - k + 1$ de $(s \rightarrow s_2 \rightarrow \dots \rightarrow s_k)$ vers $(t_1 \rightarrow \dots \rightarrow t_{k-1} \rightarrow t)$ dans $G_{pg}^{(k)}$ pour certains $s_2, \dots, s_k, t_1, \dots, t_{k-1}$. Cela amène aux conséquences suivantes. Comme tout couple de sommets dans G_{pg} est relié par un chemin de longueur 5 (lemme 3.4), tout couple de sommets dans $G_{pg}^{(k)}$ est relié par un chemin de longueur exactement $k+4$. En outre, comme le nombre de chemins de longueur l dans G_{pg} est un $\Theta(\lambda^l)$, il en est de même du nombre de chemins de longueur l dans $G_{pg}^{(k)}$. Comme A_k^{k+4} est à coefficients strictement positifs, on peut appliquer à A_k le théorème de Perron-Frobenius, et l'on en déduit, comme au (ii), que le nombre de chemins de longueur l dans

$G_{pg}^{(k)}$ est un $\Theta(\lambda_{(k)}^l)$ où $\lambda_{(k)}$ est le rayon spectral de A_k . Les deux estimations asymptotiques obtenues assurent que $\lambda_{(k)} = \lambda$.

D'autre part, éviter un chemin de longueur k dans G_{pg} revient à éviter une arête de $G_{pg}^{(k)}$. Soit $\tilde{G}_{pg}^{(k)}$ le graphe obtenu à partir de $G_{pg}^{(k)}$ en enlevant l'arête a_w correspondant à w . On note \tilde{A}_k sa matrice d'adjacence, et $\mu_{(w)}$ le rayon spectral de cette matrice. Alors, le nombre de chemins de longueur $l - k + 1$ dans $G_{pg}^{(k)}$ est un $O(\mu_{(w)}^l)$: en effet, comme au (ii), il existe une matrice inversible Q telle que $|Q\tilde{A}_k^{l-k+1}Q^{-1}|_1$ soit une somme de polynômes de degré $l - k + 1$ en les valeurs propres de \tilde{A}_k . Comme ces valeurs propres sont, en module, inférieures ou égales au rayon spectral $\mu_{(w)}$, on en déduit que $|Q\tilde{A}_k^{l-k+1}Q^{-1}|_1 = O(\mu_{(w)}^{l-k+1}) = O(\mu_{(w)}^l)$, puis que $N^{(w)}(l) = |\tilde{A}_k^{l-k+1}|_1 = O(\mu_{(w)}^l)$.

Quant au nombre de boucles de longueur $l + 1$ avec extrémité marquée dans G_{pg} , elles sont en nombre inférieur au nombre de chemins de longueur l , et donc on a également $N_{\circ}^{(w)}(l) = O(\mu_{(w)}^l)$.

Il reste à montrer que $\mu_{(w)} < \lambda$.

Étant donnés deux sommets $w_1 = (s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_k)$ et $w_2 = (t_1 \rightarrow \dots \rightarrow t_k)$ de $G_{pg}^{(k)}$, il existe toujours un chemin de longueur $l_0 = 2k + 9$ dans $G_{pg}^{(k)}$ de w_1 vers w_2 passant par l'arête a_w : en effet, il suffit de se rendre par un chemin de longueur $k + 4$ jusqu'au sommet de départ de a_w , de parcourir l'arête a_w , puis de se rendre à nouveau par un chemin de longueur $k + 4$ jusqu'à w_2 . Cela signifie qu'il y a strictement plus de chemins de longueur l_0 reliant w_1 à w_2 dans $G_{pg}^{(k)}$ que dans $\tilde{G}_{pg}^{(k)}$. Autrement dit, que la matrice $A_k^{l_0} - \tilde{A}_k^{l_0}$ est à coefficients strictement positifs. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $A_k^{l_0} - (\tilde{A}_k^{l_0} + \varepsilon I)$ a encore ses coefficients positifs (où I est la matrice identité). Le rayon spectral de $A_k^{l_0}$ est λ^{l_0} , celui de $\tilde{A}_k^{l_0} + \varepsilon I$ est $\mu_{(w)}^{l_0} + \varepsilon$. On rappelle que le rayon spectral d'une matrice B est la limite de $\|B^k\|^{\frac{1}{k}}$ quand k tend vers l'infini, où $\|\cdot\|$ est une norme matricielle quelconque. En choisissant pour $\|\cdot\|$, par exemple, la norme infinie, on en déduit que, puisque les coefficients de $A_k^{l_0}$ sont tous plus grands que ceux de $(\tilde{A}_k^{l_0} + \varepsilon I)$, on a $\lambda^{l_0} \geq \mu_{(w)}^{l_0} + \varepsilon$, et donc $\lambda > \mu_{(w)}$. \square

Remarque 3.6. Des arguments similaires permettent d'obtenir des résultats plus fins, sur le nombre de chemins ne contenant pas w dans une zone plus localisée du chemin. Plus précisément, si β est un chemin de longueur l , et que a_1, a_2, a_3 sont des fonctions de l à valeur dans \mathbb{N} , avec $a_1 + a_3$ et a_2 croissantes et tendant vers l'infini quand l tend vers l'infini, et telles que $a_1(l) + a_2(l) + a_3(l) = l$, on peut découper le chemin β en trois chemins β_1, β_2 et β_3 de longueurs respectives $a_1(l), a_2(l)$ et $a_3(l)$. Le nombre de chemins β de longueur l dont la partie « du milieu » β_2 ne contient pas le chemin w est un $\Theta(\mu_{(w)}^{a_2(l)} \lambda^{a_1(l)+a_3(l)}) = \Theta(\mu_{(w)}^{a_2(l)} \lambda^{l-a_2(l)})$.

4 Généricité des tresses pseudo-anosoviennes

4.1 Proportion des tresses rigides

Proposition 4.1. *Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Parmi les tresses β telles que $\inf \beta = 0$ et $\sup \beta = l$, la proportion des tresses rigides est minorée indépendamment de l par une constante strictement positive.*

Démonstration. En raison de l'unicité de la forme normale à gauche d'une tresse, l'ensemble des tresses β telles que $\inf \beta = 0$ et $\sup \beta = l$ est en bijection avec l'ensemble des chemins de longueur l dans le graphe de pondération à gauche G_{pg} . L'ensemble des tresses rigides d'infimum 0 et de supremum l est, quant à lui, en bijection avec l'ensemble des chemins de longueur l pour lesquels il y a une arête allant du dernier au premier sommet. La proposition est donc un corollaire du lemme 3.5, (ii). \square

4.2 Proportion des tresses non pseudo-anosoviennes

Le but de cette section est de montrer que, parmi les tresses rigides d'infimum 0 et de supremum l , la proportion des tresses non pseudo-anosoviennes tend vers 0 quand l tend vers l'infini. À cette fin, on peut exploiter le théorème suivant, dû à González-Meneses et à Wiest [10] (théorème 5.16) :

Théorème 4.2. *Soit β une tresse réductible, non périodique, qui est rigide. Il existe un entier strictement positif $k \leq n$ tel que l'une de ces deux conditions soit vérifiée :*

- (1) β^k preserve une courbe ronde, ou
- (2) $\inf(\beta^k)$ et $\sup(\beta^k)$ sont pairs, et l'une des deux tresses $\Delta^{-\inf(\beta^k)}\beta^k$ ou $\beta^{-k}\Delta^{\sup(\beta^k)}$ est une tresse positive qui préserve une courbe presque ronde dont les brins intérieurs ne se croisent pas.

Citons également le résultat suivant, de Bernadete, Gutierrez et Nitecki (théorème 5.7 dans [2]) sous la forme donnée dans [3] (théorème 1) :

Proposition 4.3. *Soit $x \in \mathcal{B}_n$, vue comme un élément de $\text{Mod}(D_n, \partial D_n)$, de forme normale $x = \Delta^p x_1 \cdots x_r$. Soit \mathcal{C} une courbe ronde dans D_n . Si $x(\mathcal{C})$ est ronde, alors $\Delta^p x_1 \cdots x_m(\mathcal{C})$ est ronde pour tout $m = 1, \dots, r$.*

Proposition 4.4. *Parmi les tresses rigides β telles que $\inf \beta = 0$ et $\sup \beta = l$, la proportion des tresses périodiques ou réductibles tend exponentiellement rapidement vers 0 quand l tend vers l'infini.*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons qu'il n'y a, en fait, aucune tresse périodique vérifiant les conditions de la proposition. En effet, si une tresse est rigide et d'infimum égal à 0, sa forme normale est de la forme $s_1 s_2 \cdots s_l$ avec (s_i, s_{i+1}) ($i = 1, \dots, l-1$) et (s_l, s_1)

pondérés à gauche. La forme normale d'une puissance de cette tresse est donc de la forme $s_1 s_2 \cdots s_l s_1 s_2 \cdots s_l \cdots s_1 s_2 \cdots s_l$ et n'est jamais une puissance de Δ .

Traisons maintenant le cas des tresses réductibles. Soit β d'infimum 0 et de supremum l , réductible non périodique, et rigide. D'après le théorème 4.2, on a trois cas possibles.

Le premier cas correspond au cas (1) du théorème. Une puissance de β préserve une courbe ronde. La rigidité de β et le fait que $\inf \beta = 0$ entraînent que la forme normale d'une puissance de β est obtenue en juxtaposant celle de β le nombre adéquat de fois. D'après la proposition 4.3, on en déduit qu'il existe une courbe ronde dont l'image par β est encore une courbe ronde.

Le deuxième cas est celui où une puissance k -ième de β est telle que $\Delta^{-\inf(\beta^k)} \beta^k$ préserve une courbe presque ronde dont les brins intérieurs ne se croisent pas. Ici, $\Delta^{-\inf(\beta^k)} \beta^k = \beta^k$. En particulier, dans ce cas, la tresse β a deux brins qui ne se croisent jamais.

Enfin, dans le troisième cas, c'est cette fois la tresse $\beta^{-k} \Delta^{\sup(\beta^k)} = \beta^{-k} \Delta^{kl}$ qui est telle que deux de ses brins ne se croisent pas, et kl est pair. Or, si la forme normale de β est $\beta = s_1 \cdots s_l$, celle de $\beta^{-k} \Delta^{kl}$ s'écrit

$$\beta^{-k} \Delta^{kl} = s_l^{(k)} \cdots s_1^{(k)} s_l^{(k-1)} \cdots s_1^{(k-1)} \cdots s_l^{(1)} \cdots s_1^{(1)}$$

où $s_i^{(j)}$ est égal à Δs_i^{-1} si $i + (j-1)l$ est impair, et à $s_i^{-1} \Delta$ si $i + (j-1)l$ est pair. (Autrement dit, les termes de la forme Δs_i^{-1} et $s_i^{-1} \Delta$ sont alternés dans l'écriture de la forme normale.) Donc cette condition implique que la tresse $\partial\beta = \beta^{-1} \Delta^{\sup \beta}$ ($\partial\beta = (s_l^{-1} \Delta)(\Delta s_{l-1}^{-1}) \cdots (\Delta s_1^{-1})$ si l pair et $\partial\beta = (s_l^{-1} \Delta)(\Delta s_{l-1}^{-1}) \cdots (s_1^{-1} \Delta)$ si l impair) a deux brins qui ne se croisent pas.

Notons Ω l'ensemble des tresses rigides d'infimum 0 et de supremum l . On note également $E_1 \subset \Omega$ le sous-ensemble formé des tresses ne contenant pas, dans leur forme normale, le facteur $s_1 s_2$ avec $s_1 = \sigma_1 \sigma_3 \cdots \sigma_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$ et $s_2 = \sigma_1 \sigma_3 \cdots \sigma_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} \sigma_2 \sigma_4 \cdots \sigma_{2\lceil \frac{n}{2} \rceil - 2}$ (voir figure 2); on note $E_2 \subset \Omega$ celui des tresses ne contenant pas, dans leur forme normale, le facteur $s_3 s_4 s_5$ avec $s_3 = \Delta_{2,n} \sigma_1$, $s_4 = \sigma_1$ et $s_5 = \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{n-1}$ (voir figure 3); et enfin on note $E_3 \subset \Omega$ celui des tresses β telles que la tresse $\partial\beta$ définie comme ci-dessus est dans E_2 .

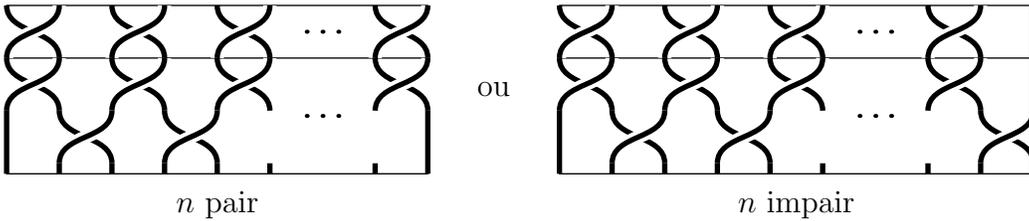


FIG. 2 – Une tresse n'envoyant aucune courbe ronde sur une courbe ronde

D'après le lemme 3.5, et en reprenant les notations, le cardinal $\#(\Omega)$ est équivalent à λ^{l+1} . On a également les estimations $\#(E_1) = O(\mu_{(s_1 s_2)}^l)$ où $\mu_{(s_1 s_2)} < \lambda$ et $\#(E_2) =$

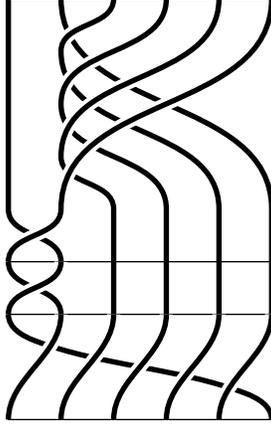


FIG. 3 – Une tresse dont tous les brins se croisent deux à deux

$O(\mu_{(s_3s_4s_5)}^l)$ où $\mu_{(s_3s_4s_5)} < \lambda$. L'ensemble E_3 est en bijection avec E_2 donc vérifie également $\#(E_3) = O(\mu_{(s_3s_4s_5)}^l)$.

Or, une tresse contenant s_1s_2 ne peut envoyer une courbe ronde sur une courbe ronde, car aucune courbe ronde n'est envoyée sur une courbe ronde par cette succession de deux tresses simples (figure 2). D'après la proposition 4.3, c'est également le cas de la tresse entière. Une tresse contenant $s_3s_4s_5$ ne peut envoyer une courbe dont les brins intérieurs ne se croisent pas sur une courbe dont les brins intérieurs ne se croisent pas, car tout couple de deux brins se croise dans cette succession de trois tresses simples (figure 3).

On en déduit que l'ensemble des tresses rigides, d'infimum 0 et de supremum l , qui sont réductibles et non périodiques, est inclus dans $E_1 \cup E_2 \cup E_3$, dont le cardinal est inférieur à $c(\mu_{(s_1s_2)}^l + 2\mu_{(s_3s_4s_5)}^l)$ pour une constante $c > 0$. Par conséquent, la proportion de tresses réductibles non périodiques parmi les tresses rigides d'infimum 0 et de supremum l tend vers 0. \square

Dans cette démonstration de la proposition 4.4, nous avons également démontré le résultat suivant, que nous utiliserons par la suite :

Lemme 4.5. *Le nombre de tresses d'infimum 0 et de supremum l , rigides et pseudo-anosoviennes, est un $\Theta(\lambda^l)$, où λ est la constante du lemme 3.5.*

En effet, on a montré que le nombre de tresses d'infimum 0 et de supremum l , rigides et non pseudo-anosoviennes, est un $O(\mu_{(s_1s_2)}^l + 2\mu_{(s_3s_4s_5)}^l)$, et d'après le lemme 3.5, on sait que le nombre de tresses d'infimum 0 et de supremum l , rigides, est de l'ordre de λ^l . Comme $\mu_{(s_1s_2)} < \lambda$ et $\mu_{(s_3s_4s_5)} < \lambda$, le nombre de tresses d'infimum 0 et de supremum l , rigides et pseudo-anosoviennes, est de l'ordre de λ^l .

4.3 Infimum quelconque

Considérons le graphe de Cayley du groupe de tresses, avec pour partie génératrice l'ensemble des tresses simples. Le lemme suivant, conséquence immédiate du lemme 3.1 dans [5], donne les formes normales à gauche possibles pour une tresse qui est à distance l de l'élément neutre dans ce graphe.

Lemme 4.6. *Soit β une tresse à distance l de l'élément neutre dans le graphe de Cayley. Alors la forme normale à gauche de β est de l'une des trois formes suivantes :*

- (i) $\beta = \Delta^{-l} s_1 \cdots s_k$, $k \in \{0, \dots, l-1\}$,
- (ii) $\beta = \Delta^{-k} s_1 \cdots s_l$, $k \in \{0, \dots, l\}$,
- (iii) $\beta = \Delta^k s_1 \cdots s_{l-k}$, $k \in \{1, \dots, l\}$.

Le théorème suivant est une généralisation des résultats obtenus précédemment dans le cas particulier d'un infimum nul.

Théorème 4.7. *Pour l assez grand, parmi les tresses à distance l de l'élément neutre dans le graphe de Cayley, la proportion de tresses rigides pseudo-anosoviennes est minorée indépendamment de l par une constante strictement positive.*

Démonstration. Tout d'abord, faisons la remarque suivante : une tresse β est pseudo-anosovienne si et seulement si $\Delta^2 \beta$ est pseudo-anosovienne. La même propriété est vérifiée en remplaçant « pseudo-anosovienne » par « rigide ». Ainsi, une tresse de forme normale $\Delta^p s_1 \cdots s_r$ avec p pair est pseudo-anosovienne (resp. rigide) si et seulement si $s_1 \cdots s_r$ l'est.

D'après le lemme 4.5, il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout l assez grand, le nombre de tresses pseudo-anosoviennes rigides de la forme $s_1 \cdots s_l$ est minoré par $c_1 \lambda^l$. Par conséquent, le nombre de tresses pseudo-anosoviennes rigides de la forme $\Delta^{-k} s_1 \cdots s_l$ avec $k \in \{0, \dots, l\}$ et k pair est minoré par $c_1 \frac{l}{2} \lambda^l$.

D'autre part, majorons le nombre total de tresses à distance l de l'élément neutre. D'après le lemme 3.5, il existe une constante c_2 telle que le nombre de tresses de forme normale $s_1 \cdots s_k$ est majoré par $c_2 \lambda^k$. Donc :

- (i) le nombre de tresses de forme normale $\Delta^{-l} s_1 \cdots s_k$ ($0 \leq k < l$) est majoré par $c_2(1 + \dots + \lambda^{l-1})$,
- (ii) le nombre de tresses de forme normale $\Delta^{-k} s_1 \cdots s_l$ ($0 \leq k \leq l$) est majoré par $c_2 l \lambda^l$,
- (iii) le nombre de tresses de forme normale $\Delta^k s_1 \cdots s_{l-k}$ ($0 < k \leq l$) est majoré par $c_2(1 + \dots + \lambda^{l-1})$.

Comme $c_2(1 + \dots + \lambda^{l-1}) \sim \frac{c_2}{\lambda-1} \lambda^l$, quitte à remplacer c_2 par une constante un peu plus grande, on peut supposer que, dans les cas (i) et (iii), le nombre de tresses est majoré par $\frac{c_2}{\lambda-1} \lambda^l$. Au final, la proportion des tresses rigides pseudo-anosoviennes parmi toutes les tresses de longueur l est minorée par

$$\frac{c_1 \frac{l}{2} \lambda^l}{\frac{c_2}{\lambda-1} \lambda^l + c_2 l \lambda^l + \frac{c_2}{\lambda-1} \lambda^l} = \frac{c_1}{2c_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{l(\lambda-1)}} \geq \frac{c_1}{2c_2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{\lambda-1}} > 0,$$

ce qui conclut la démonstration. \square

Corollaire 4.8. *Pour l assez grand, dans la boule de rayon l dans le graphe de Cayley, la proportion de tresses rigides pseudo-anosoviennes est minorée indépendamment de l par une constante strictement positive.*

Démonstration. Le nombre de tresses dans la sphère de rayon k est de l'ordre de $k\lambda^k$, et la boule de rayon l est la réunion des sphères de rayon k pour $k \leq l$. On en déduit que le nombre de tresses dans la boule de rayon l est de l'ordre de $l\lambda^l$, c'est-à-dire de l'ordre du nombre de tresses dans la sphère de rayon l . Donc la proportion des tresses pseudo-anosoviennes rigides reste de l'ordre d'une constante. \square

Références

- [1] F. ATALAN, M. KORKMAZ, *The number of pseudo-Anosov elements in the mapping class group of a four-holed sphere*, Turkish Journal Math., 34(4), (2010), p. 585–592.
- [2] D. BERNADETE, M. GUTIERREZ, Z. NITECKI, *Braids and the Nielson-Thurston classification*, J. Knot Theory and Ramif., 4 (1995), p. 549–618
- [3] M. CALVEZ, *Dual Garside structure and reducibility of braids*, Journal of Algebra, 356 (2012), p. 355–373
- [4] S. CARUSO, B. WIEST, *Sur la généricité des tresses pseudo-anosoviennes II : conjugaisons vers des tresses rigides*, article en préparation, version préliminaire disponible sur <http://perso.univ-rennes1.fr/sandrine.caruso/pAcomplGenerique2.pdf>
- [5] R. CHARNEY, J. MEIER, *The language of geodesics for Garside groups*, Math. Zeitschrift, 248 (2004), p. 495–509
- [6] P. DEHORNOY, *Combinatorics of normal sequences of braids*, J. Combinat. Th. Series A, 114 (2007), p. 389–409
- [7] P. DEHORNOY, avec F. DIGNE, E. GODELLE, J. MICHEL, *Garside Calculus*, livre en préparation, version préliminaire sur <http://www.math.unicaen.fr/~garside/Garside.pdf>
- [8] E. A. ELRIFAI, H. MORTON, *Algorithms for positive braids*, Q. J. Math., Oxf. II Ser., 45 (1994), p. 479 – 497
- [9] A. FATHI, *Dehn twists and pseudo-Anosov diffeomorphisms*, Invent. math. (1987), p. 129–151
- [10] J. GONZÁLEZ-MENESES, B. WIEST, *Reducible braids and Garside theory*, Algebr. Geom. Topol., 11 (2011), p. 2971–3010
- [11] C. GODSIL, G. ROYLE, *Algebraic Graph Theory*, Springer (2001)

- [12] J. MAHER, *Exponential decay in the mapping class group* (2011), [arXiv:1104.5543](#)
- [13] A. SISTO, *Contracting elements and random walks* (2011), [arXiv:1112.2666](#)