

# Une famille de tresses pseudo-anosoviennes dont l'ensemble super-sommital croît exponentiellement

Sandrine Caruso

5 juillet 2013

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Définitions</b>	<b>2</b>
1.1	Tresses et groupe modulaire du disque épointé . . . . .	2
1.2	Structure de Garside et invariants de conjugaison . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Une famille de tresses pseudo-Anosov</b>	<b>5</b>
2.1	Le SCS n'a qu'une orbite par cyclages ou conjugaison par $\Delta$ . . . . .	8
2.2	Courbes de réduction rondes . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Minoration du cardinal du super summit set</b>	<b>12</b>

## Introduction

Dans le cadre des groupes de tresses vus comme groupes de Garside, on s'intéresse à des invariants de conjugaison qui sont des ensembles finis de conjugués d'une tresse, étudiés dans l'espoir de trouver un algorithme en temps polynomial pour résoudre le problème de conjugaison. Parmi ces invariants, l'ensemble super-sommital, introduit par El-Rifai et Morton dans [6], est l'un des plus connus. Plus récemment, dans [8], Gebhardt et González-Meneses ont introduit un nouvel invariant, l'ensemble des circuits glissants, qui est un sous-ensemble de l'ensemble super-sommital.

Les stratégies visant à résoudre le problème de conjugaison en temps polynomial consistent, d'une part, à calculer rapidement un élément d'un invariant de conjugaison donné, et d'autre part, étant donné deux tels éléments, à déterminer s'ils se trouvent dans le même invariant. Il existe un algorithme en temps polynomial

pour, à partir d'une tresse, trouver un élément de son ensemble super-sommital [3]. En revanche, déterminer si deux tels éléments sont dans le même ensemble super-sommital semble beaucoup plus difficile à faire rapidement. En effet, en général, l'ensemble super-sommital d'une tresse n'est pas de taille polynomiale en la longueur de la tresse : dans [9], González-Meneses exhibe une famille de tresses réductibles dont la taille de l'ensemble des circuits glissants est exponentielle à la fois en la longueur des tresses et en leur nombre de brins.

On aurait pu espérer que ce comportement soit limité aux tresses réductibles. Cependant, dans [?], Prasolov exhibe une famille de tresses pseudo-anosoviennes dont l'ensemble ultra-sommital, un autre sous-ensemble de l'ensemble super-sommital, croît exponentiellement rapidement avec le nombre de brins de la tresse. Ici, s'inspirant de la construction de González-Meneses dans [9], nous dévoilons une famille de tresses pseudo-anosoviennes à 5 brins dont l'ensemble super-sommital est exponentiel en la longueur des tresses.

**Théorème 3.1.** *Soit  $k \geq 1$ . La tresse*

$$\beta_k = (\sigma_2\sigma_1)^{3k+1}\sigma_4^{2k+2}\sigma_3\sigma_4^{2k-1}$$

*est pseudo-anosovienne et a un ensemble super-sommital de cardinal supérieur ou égal à  $2^{2k-2}$ .*

Il est intéressant de noter qu'en revanche, l'ensemble des circuits glissants de cette famille de tresses est aussi petit que possible (lemme 2.4). Ceci est en accord avec la conjecture suivante, bien connue des spécialistes du domaine :

**Conjecture.** *Pour tout  $n$ , il existe un polynôme  $P_n$  tel que, pour toute tresse pseudo-anosovienne  $x$  à  $n$  brins de longueur canonique  $\ell$ , le cardinal de l'ensemble des circuits glissants de  $x$  est inférieur à  $P_n(\ell)$ .*

Je remercie mon directeur de thèse Bert Wiest pour son aide et ses précieux conseils.

## 1 Définitions

### 1.1 Tresses et groupe modulaire du disque épointé

**Définition 1.1** (groupe modulaire du disque épointé). On note  $D_n$  le disque unité fermé dans  $\mathbb{C}$  auquel on a enlevé  $n$  points régulièrement espacés sur l'axe réel. Le *groupe modulaire* de  $D_n$ , noté  $\text{Mod}(D_n)$ , est le groupe des homéomorphismes de  $D_n$

quotienté par la relation d'isotopie. On note également  $\text{Mod}(D_n, \partial D_n)$  le groupe des homéomorphismes de  $D_n$  fixant point par point le bord  $\partial D_n$  de  $D_n$ , quotienté par la relation d'isotopie.

Le groupe des tresses à  $n$  brins d'Artin est isomorphe au groupe  $\text{Mod}(D_n, \partial D_n)$ .

Rappelons que le théorème de classification de Nielsen-Thurston affirme qu'un élément  $f \in \text{Mod}(D_n)$  est soit périodique, soit réductible, soit pseudo-anosovienne. Une tresse  $x \in \text{Mod}(D_n, \partial D_n)$  peut être projetée en un élément de  $\text{Mod}(D_n)$ . On appelle *type de Nielsen-Thurston de  $x$*  le type de Nielsen-Thurston de son projeté. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que la définition de *périodique* est alors transformée comme suit : une tresse  $x \in \mathcal{B}_n$  est périodique si et seulement si il existe des entiers non nuls  $m$  et  $l$  tels que  $x^m = \Delta^l$ , où  $\Delta = (\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1})(\sigma_1 \cdots \sigma_{n-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$  ( $\Delta$  correspond au demi-twist autour du bord du disque).

## 1.2 Structure de Garside et invariants de conjugaison

Sur la théorie de Garside, on pourra consulter la référence [5]. Nous en rappelons ici quelques éléments utiles pour la suite.

Tandis que le groupe  $\mathcal{B}_n$  admet la présentation de groupes

$$\mathcal{B}_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} ; \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ et } \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ pour } |i - j| \geq 2 \rangle,$$

le monoïde des *tresses positives*  $\mathcal{B}_n^+$ , qui est plongé dans  $\mathcal{B}_n$ , est défini par la même présentation, interprétée comme présentation de monoïdes.

Pour  $m \leq n$ , on note  $\Delta_m$  l'élément de  $\mathcal{B}_n^+$  défini par

$$\Delta_m = (\sigma_1 \cdots \sigma_{m-1})(\sigma_1 \cdots \sigma_{m-2}) \cdots (\sigma_1 \sigma_2) \sigma_1$$

et on notera  $\Delta = \Delta_n \in \mathcal{B}_n^+$ .

La paire  $(\mathcal{B}_n^+, \Delta)$  définit ce que l'on appelle une structure de Garside sur  $\mathcal{B}_n$ . Sans en donner la définition complète, voici quelques propriétés d'une telle structure. Le groupe  $\mathcal{B}_n$  est muni d'une relation d'ordre  $\preceq$  définie par  $x \preceq y \Leftrightarrow x^{-1}y \in \mathcal{B}_n^+$ . Si  $x \preceq y$ , on dit que  $x$  est un *préfixe* de  $y$ . Deux éléments  $x, y \in \mathcal{B}_n$  ont un unique plus grand préfixe commun.

On définit également  $\succ$  par  $x \succ y \Leftrightarrow xy^{-1} \in \mathcal{B}_n^+$ . Remarquons que  $x \succ y$  n'est pas équivalent à  $y \preceq x$ .

Les éléments de l'ensemble  $\{x \in \mathcal{B}_n, 1 \preceq x \preceq \Delta\}$  sont appelés *tresses simples*.

**Définition 1.2** (pondération à gauche). Soient  $s_1, s_2$  deux tresses simples dans  $\mathcal{B}_n$ . On dit que  $s_1$  et  $s_2$  sont *pondérés à gauche* s'il n'existe aucun générateur  $\sigma_i$  tel que  $s_1 \sigma_i$  et  $\sigma_i^{-1} s_2$  soient toutes les deux encore simples.

**Proposition 1.3.** Soit  $x \in \mathcal{B}_n$ . Il existe une unique décomposition  $x = \Delta^p x_1 \cdots x_r$  tels que  $x_1, \dots, x_r$  sont des éléments simples distincts de  $\Delta$  et de 1, et tels que pour tout  $i = 1, \dots, r - 1$ ,  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sont pondérés à gauche.

**Définition 1.4** (forme normale à gauche). Dans la proposition précédente, l'écriture  $x = \Delta^p x_1 \cdots x_r$  s'appelle *forme normale à gauche* de  $x$ ,  $p$  est appelé l'*infimum* de  $x$  et noté  $\inf x$ ,  $p + r$  est le *suprémum* de  $x$  et noté  $\sup x$ , et  $r$  est appelé *longueur canonique* de  $x$ .

En outre, on note  $\iota(x) = \Delta^{-p} x_1 \Delta^p$  le *facteur initial* de  $x$  ( $\iota(x) = x_1$  si  $p$  est pair,  $\iota(x) = \Delta^{-1} x_1 \Delta$  si  $p$  est impair), et  $\phi(x) = x_r$  son *facteur final*.

**Définition 1.5** (ensemble super-sommital). Soit  $x \in \mathcal{B}_n$ . On appelle *ensemble super-sommital* de  $x$  (en abrégé, SSS) l'ensemble des conjugués de  $x$  de longueur canonique minimale.

De manière évidente, si  $x$  et  $y$  sont conjugués, ils ont le même ensemble super-sommital : un tel ensemble est appelé *invariant de conjugaison*.

**Définition 1.6** (cyclage, décyclage). Soient  $x \in \mathcal{B}_n$  et  $x = \Delta^p x_1 \cdots x_r$  sa forme normale. Si  $r \geq 1$ , on définit

- le *cyclage* de  $x$  par  $\iota(x)^{-1} x \iota(x) = \Delta_p x_2 \cdots x_r x_1$ ,
- le *décyclage* de  $x$  par  $\phi(x) x \phi(x)^{-1} = \Delta_p x'_r x_1 \cdots x_{r-1}$ ,

avec  $x'_1 = \iota(x) = x_1$  ou  $\Delta^{-1} x_1 \Delta$ , et  $x'_r = \phi(x) = x_r$  ou  $\Delta^{-1} x_r \Delta$ , selon la parité de  $p$ . Si  $r = 0$ , le cyclage et le décyclage de  $x$  sont égaux à  $x$  lui-même.

Une propriété intéressante du cyclage et du décyclage est qu'ils préservent le SSS. En plus de cela, à partir d'une tresse quelconque, on peut obtenir un élément de son SSS en effectuant un nombre fini de cyclages et décyclages [6].

Un autre type de conjugaison est le *glissement cyclique* [8].

**Définition 1.7** (glissement cyclique). On appelle *préfixe préféré* de  $x$  le plus grand préfixe commun à  $\iota(x)$  et  $\partial\phi(x) = \phi(x)^{-1} \Delta$ . Le *glissement cyclique* est défini comme la conjugaison par le préfixe préféré.

Le glissement cyclique préserve également l'ensemble super-sommital.

L'opération de glissement cyclique est ultimement périodique, parce qu'il n'augmente pas la longueur de la tresse : cela nous permet de définir un autre invariant de conjugaison [8].

**Définition 1.8** (ensemble des circuits glissants). On appelle *ensemble des circuits glissants* d'une tresse  $x$  (en abrégé SCS, comme « sliding circuit set ») l'ensemble des conjugués de  $x$  qui sont des points périodiques du glissement cyclique.

Le SCS de  $x$  est un sous-ensemble du SSS [8].

**Définition 1.9** (rigidité). Une tresse  $x$  est dite *rigide* si  $\phi(x)$  et  $\iota(x)$  sont pondérés à gauche, autrement dit, si le glissement cyclique de  $x$  est égal à  $x$ .

Une tresse rigide, par définition, appartient nécessairement à son SCS, puisqu'elle est un point périodique de période 1 du glissement cyclique.

## 2 Une famille de tresses pseudo-anosoviennes

Soit  $k \geq 2$  un entier. On définit la tresse à 5 brins

$$\beta_k = \delta_3^{3k+1} \sigma_4^{2k+2} \sigma_3 \sigma_4^{2k-1}$$

où  $\delta_3 = \sigma_2 \sigma_1$ . Rappelons que l'on note aussi  $\Delta_3 = \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$ .

**Lemme 2.1.** *La forme normale à gauche de  $\beta_k$  est donnée par la factorisation ci-dessous*

$$\beta_k = (\Delta_3 \sigma_4)^{2k} (\delta_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4) (\sigma_3 \sigma_4) (\sigma_4)^{2k-3}.$$

*En particulier,  $\inf \beta_k = 0$  et  $\sup \beta_k = 4k - 1$ .*

*Démonstration.* On vérifie aisément que cette écriture est bien égale à  $\beta_k$  (rappelons que  $\Delta_3^2 = \delta_3^3$ ), que chacun de ces facteurs est une tresse simple, et que deux facteurs successifs sont pondérés à gauche. (Voir figure 1.) □

Considérons également la tresse

$$\tilde{\beta}_k = (\sigma_1 \sigma_3)^{2k-2} (\sigma_3 \sigma_4 \Delta_3) (\Delta_3 \sigma_4) [(\delta_3 \sigma_4) (\tilde{\delta}_3 \sigma_4)]^{k-1} (\delta_3 \sigma_4 \sigma_3 \sigma_4).$$

(Voir figure 2.)

**Lemme 2.2.** *La tresse  $\tilde{\beta}_k$  est conjuguée à  $\beta_k$ , et, de plus, est rigide et appartient à leur SCS. En outre,  $\inf \tilde{\beta}_k = 0 = \inf \beta_k$  et  $\sup \tilde{\beta}_k = 4k - 1 = \sup \beta_k$ .*

On en déduit immédiatement le

**Corollaire 2.3.** *La tresse  $\beta_k$  est un élément de son SSS.*

En effet,  $\beta_k$  a la même longueur canonique qu'un de ses conjugué qui appartient à leur SCS, donc à leur SSS.



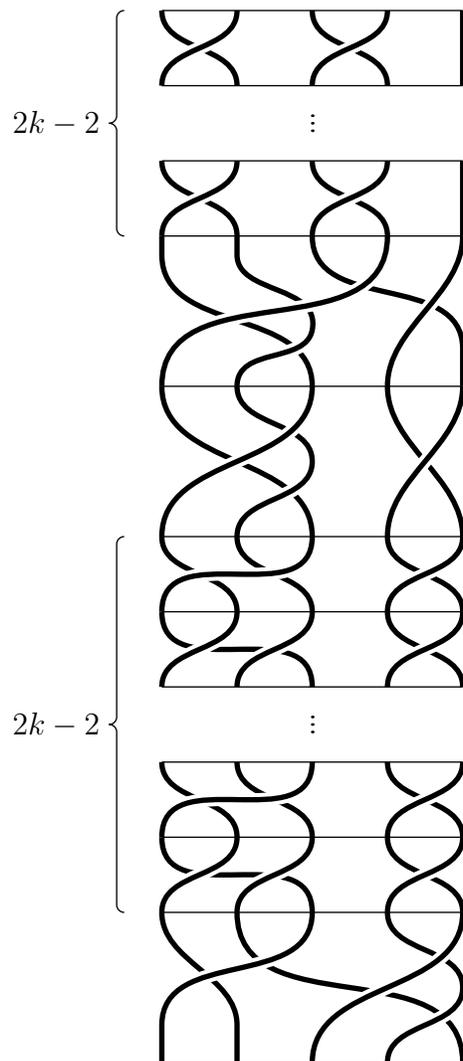


FIGURE 2 – Tresse  $\tilde{\beta}_k$  en forme normale à gauche.

*Démonstration du lemme 2.2.* La tresse  $\tilde{\beta}_k$  est obtenue en conjuguant  $\beta_k$  par

$$\tau = (\Delta_3\sigma_4)^{2k}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4)^{2k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4),$$

i.e.  $\tilde{\beta}_k = \tau^{-1}\beta_k\tau$ . Alors, la forme normale de  $\tilde{\beta}_k$  est

$$\tilde{\beta}_k = (\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4)[(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4).$$

On constate que cette tresse est rigide, et donc appartient au SCS de  $\beta_k$ . D'autre part, on a bien  $\inf \tilde{\beta}_k = 0$  et  $\sup \tilde{\beta}_k = 4k - 1$ .  $\square$

## 2.1 Le SCS n'a qu'une orbite par cyclages ou conjugaison par $\Delta$

**Lemme 2.4.** *Le SCS de  $\beta_k$  est réduit à l'orbite de  $\tilde{\beta}_k$  sous l'opération de cyclage ou de conjugaison par  $\Delta$ .*

On notera  $\mathcal{O}(\tilde{\beta}_k)$  cette orbite sous cyclages et conjugaison par  $\Delta$ . Remarquons que, en raison de la rigidité de  $\tilde{\beta}_k$ , un cyclage de  $\tilde{\beta}_k$  est simplement une permutation cyclique de ses facteurs.

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants : le lemme 2.6 réunit des résultats démontrés dans [7] ou dans [2] (section 3.3). Le lemme 2.7 est énoncé et prouvé dans [10] (lemme 6.1).

**Définition 2.5** (transport). Soit  $x \in \mathcal{B}_n$  telle que  $x$  soit dans son ensemble super-sommital. Soit  $s$  une tresse simple telle que  $y = s^{-1}xs$  est encore dans l'ensemble super-sommital de  $x$ . Soient  $x' = \iota(x)^{-1}x\iota(x)$  et  $y' = \iota(y)^{-1}y\iota(y)$  les tresses obtenues par cyclage à partir de, respectivement,  $x$  et  $y$ . On appelle *transport* de  $s$  la tresse  $s^{(1)} = \iota(x)^{-1}s\iota(y)$ , c'est-à-dire la tresse telle que  $y' = (s^{(1)})^{-1}x's^{(1)}$ .

**Lemme 2.6.** *Si  $s$  est simple,  $s^{(1)}$  est simple. En outre, pour  $s$  et  $t$  simples,  $s \preceq t$  implique  $s^{(1)} \preceq t^{(1)}$ , et  $(\iota(x))^{(1)} = \iota(x')$ . En particulier, si  $s$  est un préfixe de  $\iota(x)$ , alors  $s^{(1)}$  est un préfixe de  $\iota(x')$ . On a aussi  $(\partial\phi(x))^{(1)} = \partial\phi(x')$ , et en particulier, si  $s$  est un préfixe de  $\partial\phi(x)$ , alors  $s^{(1)}$  est un préfixe de  $\partial\phi(x')$ .*

**Lemme 2.7.** *Soient  $x$  et  $y$  deux éléments conjugués, tous les deux dans leur SCS. Alors il existe une suite d'éléments  $x = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1} = y$ , tous dans le SCS, et des tresses simples  $s_1, \dots, s_r$ , tels que  $\alpha_{i+1} = s_i^{-1}\alpha_i s_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , et tels que  $s_i \preceq \iota(\alpha_i)$  ou  $s_i \preceq \iota(\alpha_i^{-1}) = \partial\phi(\alpha_i)$ .*

*Démonstration du lemme 2.4.* Soit  $\iota = \iota(\tilde{\beta}_k) = \sigma_1\sigma_3$  le facteur initial de  $\tilde{\beta}_k$  et  $\phi = \phi(\tilde{\beta}_k) = \delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4$  son facteur final, et  $\partial\phi = \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2\sigma_4$  le complément de  $\phi$  (c'est-à-dire  $\phi \cdot \partial\phi = \Delta$ ). Montrons que pour tout préfixe strict  $p$  de  $\iota$  ou de  $\partial\phi$ , la tresse  $p^{-1}\tilde{\beta}_kp$  n'appartient pas au SCS de  $\tilde{\beta}_k$ .

Faisons la liste des préfixes stricts de  $\iota$  et de  $\partial\phi$ . Les préfixes stricts de  $\iota = \sigma_1\sigma_3$  sont  $\sigma_1$  et  $\sigma_3$ . Ceux de  $\partial\phi$  sont  $\sigma_2, \sigma_2\sigma_1, \sigma_2\sigma_3, \sigma_2\sigma_1\sigma_3, \sigma_2\sigma_3\sigma_4, \sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$  et  $\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4$ . Pour chacun d'entre eux, calculons la forme normale de  $p^{-1}\tilde{\beta}_kp$ .

– Pour  $\sigma_1$  :

$$\begin{aligned}\sigma_1^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_1 &= \sigma_1^{-1}(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4)[(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)\sigma_1 \\ &= (\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)[(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)\sigma_1,\end{aligned}$$

la dernière ligne étant sous forme normale à gauche.

– Pour  $\sigma_3$  :

$$\sigma_3^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_3 = (\sigma_1\sigma_3)^{2k-3}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4)^2(\tilde{\delta}_3\sigma_4)[(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-2}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)\sigma_3.$$

– Pour  $\sigma_2$  :

$$\begin{aligned}\sigma_2^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2 &= \Delta^{-1}(\Delta_3\sigma_3\sigma_2\sigma_4\sigma_3\delta_3)(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4) \\ &\quad [(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4\sigma_2).\end{aligned}$$

– Pour  $\sigma_2\sigma_1$  :

$$\begin{aligned}(\sigma_2\sigma_1)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1 &= \Delta^{-1}(\Delta_3\sigma_3\delta_3\sigma_4\sigma_3)(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4) \\ &\quad [(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_1).\end{aligned}$$

– Pour  $\sigma_2\sigma_3$  :

$$\begin{aligned}(\sigma_2\sigma_3)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_3 &= \Delta^{-1}(\tilde{\delta}_3\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_3\delta_3)(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4) \\ &\quad [(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_3).\end{aligned}$$

– Pour  $\sigma_2\sigma_1\sigma_3$  :

$$\begin{aligned}(\sigma_2\sigma_1\sigma_3)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1\sigma_3 &= \Delta^{-1}(\tilde{\delta}_3\sigma_3\delta_3\sigma_4\sigma_3)(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4) \\ &\quad [(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_1\sigma_3).\end{aligned}$$

– Pour  $\sigma_2\sigma_3\sigma_4$  :

$$\begin{aligned}(\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_3\sigma_4 &= \Delta^{-1}(\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_4\sigma_3\delta_3)(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4)^2 \\ &\quad (\tilde{\delta}_3\sigma_4)[(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-2}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_3).\end{aligned}$$

– Pour  $\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2$  :

$$(\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_2 = (\sigma_3\sigma_4\sigma_3\Delta_3)(\sigma_2\sigma_4)^{2k-2}(\delta_3\sigma_3\sigma_4\sigma_3) \\ (\sigma_1\sigma_4\sigma_3)[(\sigma_1\sigma_3\sigma_4)(\sigma_1\sigma_4\sigma_3)]^{k-1}.$$

– Pour  $\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4$  :

$$(\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4 = \Delta^{-1}(\sigma_2\sigma_3\delta_3\sigma_4\sigma_3)(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}(\sigma_3\sigma_4\Delta_3)(\Delta_3\sigma_4) \\ [(\delta_3\sigma_4)(\tilde{\delta}_3\sigma_4)]^{k-1}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4).$$

On constate que la longueur canonique de  $\sigma_1^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_1$ ,  $\sigma_2^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2$ ,  $(\sigma_2\sigma_1)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1$ ,  $(\sigma_2\sigma_3)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_3$ ,  $(\sigma_2\sigma_1\sigma_3)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1\sigma_3$ ,  $(\sigma_2\sigma_3\sigma_4)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_3\sigma_4$  et  $(\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4$  est  $4k$ , et donc que ces éléments ne sont pas dans le SSS de  $\tilde{\beta}_k$ , donc *a fortiori* pas dans son SCS.

Quant à  $\sigma_3^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_3$  et  $(\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4)^{-1}\tilde{\beta}_k\sigma_2\sigma_1\sigma_3\sigma_4$ , ils sont certes dans le SSS, mais ils ne sont pas rigides et ne peuvent donc être dans le SCS, en vertu du fait que si le SCS contient un élément rigide, alors tous ses éléments sont rigides (voir le corollaire 11 dans [8]).

Maintenant, les lemmes 2.6 et 2.7 permettent de conclure. Supposons qu'il existe une tresse  $\alpha$  dans l'ensemble des circuits glissants de  $\tilde{\beta}_k$  mais qui ne soit pas dans  $\mathcal{O}(\tilde{\beta}_k)$ . D'après le lemme 2.7, il existe une suite  $\tilde{\beta}_k = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \alpha_{r+1} = \alpha$  d'éléments de l'ensemble des circuits glissants vérifiant les conclusions du lemme 2.7. Soit  $i$  le plus petit indice tel que  $\alpha_1, \dots, \alpha_i$  sont dans  $\mathcal{O}(\tilde{\beta}_k)$  et  $\alpha_{i+1}$  n'y est pas. On note  $s$  la tresse par laquelle on conjugue  $\alpha_i$  pour obtenir  $\alpha_{i+1}$ . C'est, d'après le lemme 2.7, une tresse simple qui est un préfixe de  $\iota(\alpha_i)$  ou de  $\partial\phi(\alpha_i)$ .

Notons  $\alpha_i = \gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_t = \tilde{\beta}_k$  les éléments de  $\mathcal{O}(\tilde{\beta}_k)$  tels que  $\gamma_{j+1}$  est obtenu de  $\gamma_j$  par cyclage (ou, le cas échéant,  $\gamma_t = \Delta^{-1}\gamma_{t-1}\Delta$ ). D'après le lemme 2.6, le transport  $s^{(1)}$  de  $s$  est une tresse simple, préfixe de  $\iota(\gamma_1)$  ou de  $\partial\phi(\gamma_1)$ . On définit par récurrence  $s^{(j+1)} = (s^{(j)})^{(1)}$  (ou, le cas échéant,  $s^{(t)} = \Delta^{-1}s^{(t-1)}\Delta$ ), et toujours en vertu du lemme 2.6 (et, le cas échéant, du fait que le conjugué par  $\Delta$  d'un préfixe de  $\iota(x)$  est un préfixe de  $\iota(\Delta^{-1}x\Delta)$ ), pour tout  $j$ ,  $s^{(j)}$  est un préfixe de  $\iota(\gamma_j)$  ou de  $\partial\phi(\gamma_j)$ . En particulier,  $s^{(t)}$  est un préfixe de  $\iota(\tilde{\beta}_k)$  ou de  $\partial\phi(\tilde{\beta}_k)$ . Ainsi,  $\tilde{\beta}_k$  est envoyé par conjugaison par  $s^{(t)}$  sur une tresse qui n'est pas dans son orbite  $\mathcal{O}(\tilde{\beta}_k)$ , puisqu'elle est dans l'orbite de  $\alpha_{i+1}$ . Or, ceci est impossible : d'après l'étude exhaustive réalisée ci-dessus, le conjugué de  $\tilde{\beta}_k$  par un préfixe strict de  $\iota(\tilde{\beta}_k)$  ou de  $\partial\phi(\tilde{\beta}_k)$  n'est jamais un élément de l'ensemble des circuits glissants, et les conjugués par  $\iota(\tilde{\beta}_k)$  et  $\partial\phi(\tilde{\beta}_k)$  eux-mêmes sont des éléments de  $\mathcal{O}(\tilde{\beta}_k)$ .  $\square$

## 2.2 Courbes de réduction rondes

Nous voulons démontrer le théorème suivant

**Théorème 2.8.** *La tresse  $\tilde{\beta}_k$  (et donc également la tresse  $\beta_k$ , qui lui est conjuguée) est pseudo-anosovienne.*

Il est tout d'abord facile de démontrer le

**Lemme 2.9.** *La tresse  $\tilde{\beta}_k$  n'est pas périodique.*

*Démonstration.* Si  $\tilde{\beta}_k$  était périodique, une de ses puissance serait égale à une puissance de  $\Delta$ . Or,  $\tilde{\beta}_k$  étant rigide avec  $\inf \tilde{\beta}_k = 0$ , la forme normale d'une puissance de  $\tilde{\beta}_k$  est obtenue directement en juxtaposant celle de  $\tilde{\beta}_k$  le nombre adéquat de fois. Il est donc évident que ce n'est pas une puissance de  $\Delta$ .  $\square$

Il reste donc à démontrer que  $\tilde{\beta}_k$  n'est pas réductible. Le résultat suivant (corollaire 4.3 de [9]) nous permettra de nous ramener au cas des courbes de réduction rondes (c'est-à-dire homotopes à un cercle) :

**Proposition 2.10.** *Pour toute tresse  $x \in \mathcal{B}_n$  réductible et non périodique, il existe un conjugué de  $x$  dans son SCS qui préserve une famille de courbes rondes.*

Citons également ce théorème de Bernadete, Gutierrez et Nitecki (théorème 5.7 dans [1]) sous la forme donnée dans [4] (théorème 1) :

**Proposition 2.11.** *Soit  $x \in \mathcal{B}_n$ , vue comme un élément de  $\text{Mod}(D_n, \partial D_n)$ , de forme normale  $x = \Delta^p x_1 \cdots x_r$ . Soit  $\mathcal{C}$  une courbe ronde dans  $D_n$ . Si  $x(\mathcal{C})$  est ronde, alors  $\Delta^p x_1 \cdots x_m(\mathcal{C})$  est ronde pour tout  $m = 1, \dots, r$ .*

Un corollaire de ce dernier résultat est que, si un élément du SCS préserve une famille de courbes rondes, alors c'est également le cas des tresses obtenues en lui appliquant des cyclages (ainsi, bien sûr, que de leurs conjugués par  $\Delta$ ). Or, d'après le lemme 2.4, le SCS est réduit à une seule orbite sous cyclage ou conjugaison par  $\Delta$ . Il suffit donc de démontrer que  $\tilde{\beta}_k$  n'envoie aucune courbe ronde sur une courbe ronde : cela établira qu'aucun élément du SCS n'envoie de courbe ronde sur une courbe ronde, puis, en vertu de la proposition 2.10, que  $\tilde{\beta}_k$  n'est pas réductible.

Sur la figure 3 est représentée la liste exhaustive des courbes essentielles rondes pour une tresse à 5 brins. Vérifions qu'aucune de ces courbes n'est envoyée sur une courbe ronde par  $\tilde{\beta}_k$ . Notons que, encore d'après la proposition 2.11, il suffit qu'une tresse composée des premiers facteurs de  $\tilde{\beta}_k$  transforme la courbe ronde en une courbe qui n'est pas ronde, pour s'assurer que l'image finale ne sera pas ronde non plus.

Vérifions ceci explicitement pour chacune des courbes rondes de la figure 3. Après application du premier facteur  $\sigma_1 \sigma_3$ , seules les images des courbes  $a)$ ,  $c)$ ,  $g)$  et  $h)$  sont encore rondes. Toutes les quatre sont transformées en elles-mêmes, et donc restent

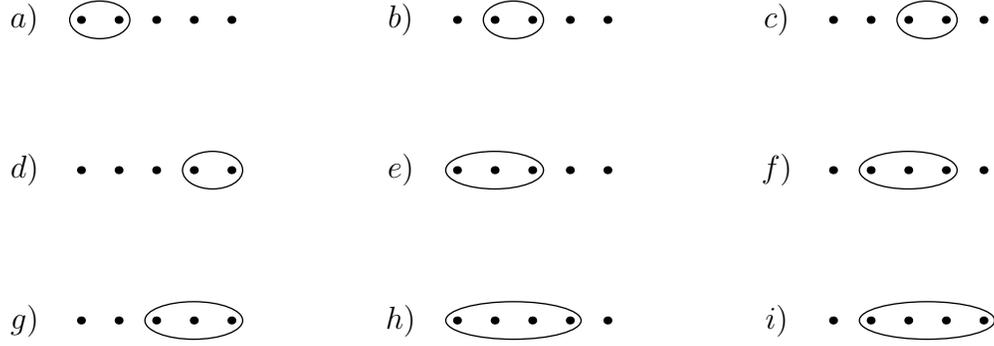


FIGURE 3 – Toutes les courbes rondes pour 5 brins.

également inchangées après avoir appliqué  $(\sigma_1\sigma_3)^{2k-2}$ . Le facteur  $\sigma_3\sigma_4\Delta_3$  transforme a) en b), tandis que les images de c), g) et h) ne sont plus rondes. Par  $\Delta_3\sigma_4$ , b) est à nouveau transformée en a), puis l'application des éléments  $\delta_3\sigma_4$  et  $\tilde{\delta}_3\sigma_4$  transforme alternativement a) en b) et b) en a). Enfin, le dernier facteur  $\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4$  transforme a) en une courbe qui n'est pas ronde.

Au final, aucune des courbes rondes n'est transformée en une courbe ronde par  $\tilde{\beta}_k$ . Ceci achève la démonstration du théorème 2.8.

### 3 Minoration du cardinal de l'ensemble super-sommital

**Théorème 3.1.** *Soit*

$$\beta_k = \delta_3^{3k+1}\sigma_4^{2k+2}\sigma_3\sigma_4^{2k-1} = (\Delta_3\sigma_4)^{2k}(\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)(\sigma_3\sigma_4)(\sigma_4)^{2k-3}$$

comme dans la section 2. Le cardinal de son ensemble super-sommital est supérieur ou égal à  $2^{2k-2}$ .

*Démonstration.* On note  $\alpha_{11} = \sigma_1$ ,  $\alpha_{12} = \sigma_1\sigma_2$ ,  $\alpha_{21} = \sigma_2\sigma_1$  et  $\alpha_{22} = \sigma_2$ , de sorte que pour tous  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $S(\alpha_{ij}) = \{\sigma_i\}$  et  $F(\alpha_{ij}) = \{\sigma_j\}$ , où  $S(x)$  désigne l'ensemble des générateurs  $\sigma_l$  tels que  $\sigma_l \preceq x$ , et  $F(x)$  l'ensemble des  $\sigma_l$  tels que  $x \succeq \sigma_l$ . Si l'on choisit une suite d'éléments  $i_1, \dots, i_{2k-2} \in \{1, 2\}$ , notons

$$\beta_{k, i_1, \dots, i_{2k-2}} = (\alpha_{1i_1}\alpha_{i_1i_2} \cdots \alpha_{i_{2k-3}i_{2k-2}})^{-1}\beta_k(\alpha_{1i_1}\alpha_{i_1i_2} \cdots \alpha_{i_{2k-3}i_{2k-2}}).$$

D'une part,  $\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4$  et  $\sigma_3\sigma_4\alpha_{1i_1}$  sont pondérés à gauche, et c'est également le cas de  $\sigma_3\sigma_4\alpha_{i_1i_2}$  et  $\sigma_4\alpha_{i_1i_2}$ , de  $\sigma_4\alpha_{i_2i_3}$  et  $\sigma_4\alpha_{i_2i_3}$ , etc. D'autre part, on peut calculer la forme normale de  $(\alpha_{1i_1}\alpha_{i_1i_2} \cdots \alpha_{i_{2k-3}i_{2k-2}})^{-1}$  vue comme tresse à 3 brins : la forme normale

d'une tresse s'exprime facilement en fonction de celle de son inverse (voir [6]). Celle de  $(\alpha_{1i_1}\alpha_{i_1i_2}\cdots\alpha_{i_{2k-3}i_{2k-2}})^{-1}$  dans  $\mathcal{B}_3$  est

$$\Delta_3^{-(2k-2)}\partial_3^{-(2(2k-2)+1)}(\alpha_{i_{2k-3}i_{2k-2}})\cdots\partial_3^{-3}(\alpha_{i_1i_2})\partial_3^{-1}(\alpha_{1i_1}),$$

où  $\partial_3(x) = x^{-1}\Delta_3$  (et donc  $\partial_3^{-(2l+1)}(x) = \Delta_3^{l+1}x^{-1}\Delta_3^{-l}$ ). En outre,  $\partial^{-1}(\alpha_{1i_1})\sigma_4 = \Delta_3\alpha_{1i_1}\sigma_4$  et  $\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4$  sont pondérés à gauche. On en déduit que la forme normale à gauche de  $\beta_{k,i_1,\dots,i_{2k-2}}$  est

$$\beta_{k,i_1,\dots,i_{2k-2}} = (\Delta_3\sigma_4)^2(\partial_3^{-(2(2k-2)+1)}(\alpha_{i_{2k-3}i_{2k-2}})\sigma_4)\cdots(\partial_3^{-3}(\alpha_{i_1i_2})\sigma_4)(\partial_3^{-1}(\alpha_{1i_1})\sigma_4) \\ (\delta_3\sigma_4\sigma_3\sigma_4)(\sigma_3\sigma_4\alpha_{1i_1})(\sigma_4\alpha_{i_1i_2})\cdots(\sigma_4\alpha_{i_{2k-3}i_{2k-2}}).$$

En particulier,  $\beta_{k,i_1,\dots,i_{2k-2}}$  est de longueur  $4k - 1$ , donc est dans l'ensemble super-sommital. Cette forme normale nous permet également de constater que  $\beta_{k,i_1,\dots,i_{2k-2}} = \beta_{k,j_1,\dots,j_{2k-2}}$  si et seulement si  $i_1 = j_1, \dots, i_{2k-2} = j_{2k-2}$ . Les  $2^{2k-2}$  choix possibles pour  $(i_1, \dots, i_{2k-2})$  donnent donc lieu à  $2^{2k-2}$  éléments distincts dans l'ensemble super-sommital de  $\beta_k$ .  $\square$

## Références

- [1] D. BERNADETE, M. GUTIERREZ, Z. NITECKI, *Braids and the Nielson-Thurston classification*, J. Knot Theory and Ramif., 4 (1995), p. 549–618
- [2] J. BIRMAN, V. GEBHARDT, J. GONZÁLEZ-MENESES, *Conjugacy in Garside groups. II. Structure of the ultra summit set*, Groups Geom. Dyn., 2 (2008), p. 13–61
- [3] J. BIRMAN, K. H. KO, S. L. LEE, *The infimum, supremum, and geodesic length of a braid conjugacy class*, Adv. Math., 164 (2001), p. 41–56
- [4] M. CALVEZ, *Dual Garside structure and reducibility of braids*, Journal of Algebra, 356 (2012), 355–373
- [5] P. DEHORNOY, avec F. DIGNE, E. GODELLE, J. MICHEL, *Garside Calculus*, livre en préparation, version préliminaire sur <http://www.math.unicaen.fr/~garside/Garside.pdf>
- [6] E. A. ELRIFAI, H. MORTON, *Algorithms for positive braids*, Q. J. Math., Oxf. II. Ser., 45 (1994), p. 479–497
- [7] V. GEBHARDT, *A new approach to the conjugacy problem in Garside groups*, Journal of Algebra, 292, No. 1 (2005), p. 282–302

- [8] V. GEBHARDT, J. GONZÁLEZ-MENESES, *The cyclic sliding operation in Garside groups*, *Math. Z.*, 265 (2010), p. 85–114
- [9] J. GONZÁLEZ-MENESES, *On reduction curves and Garside properties of braids*, *Topology of algebraic varieties and singularities*, *Contemp. Math.*, 538, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2011), p. 227–244
- [10] J. GONZÁLEZ-MENESES, B. WIEST, *Reducible braids and Garside theory*, *Algebr. Geom. Topol.*, 11 (2011), p. 2971–3010
- [11] M. PRASOLOV, *Small braids with large ultra summit set*, *Mat. Zametki*, 89 (2011), no. 4, p. 577–588; translation in *Math. Notes*, 89 (2011), no. 3-4, p. 545–554