Sandrine CARUSO

Formes linéaires et extensions de corps.

Proposition. *Soit L/K une extension finie de corps. Soit E un L-espace vectoriel de dimension finie, et F un K-sous-espace-vectoriel de E tel que pour toute forme L-linéaire non nulle φ sur E, $\varphi(F) = L$. Alors $F = E$.*

Nous commençons par démontrer ce résultat dans le cas où $K = L$. On raisonne par contraposée en supposant que $F \neq E$ et en montrant qu'il ne vérifie pas l'hypothèse de l'énoncé. Si $F \subsetneq E$, cela signifie qu'il est inclus dans un hyperplan H de E. Soit alors φ une forme linéaire sur E telle que $\ker \varphi = H$. Elle est non nulle et vérifie $\varphi(F) = \{0\}$.

On se place à nouveau dans le cas général et on montre le lemme suivant.

Lemme. *On fixe une forme K-linéaire non nulle $t : L \to K$ (par exemple la trace). Pour toute forme K-linéaire $\psi : E \to K$, il existe une forme L-linéaire $\varphi : E \to L$ telle que $\psi = t \circ \varphi$.*

Démonstration. Tout d'abord, remarquons que si $\varphi \in \mathcal{L}_L(E, L)$, alors $t \circ \varphi$ est une forme K-linéaire de E dans K. Ainsi, l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi & : & \mathcal{L}_L(E,L) & \longrightarrow & \mathcal{L}_K(E,K) \\ & & \varphi & \longmapsto & t \circ \varphi \end{array}$$

est bien définie. C'est une application K-linéaire (simple vérification utilisant le K-linéarité de t). Établir le lemme revient à montrer que Φ est surjective. Par dualité, $\dim_L(\mathcal{L}_L(E, L)) = \dim_L(E)$ et $\dim_K(\mathcal{L}_K(E, K)) = \dim_K(E)$. D'autre part,

$$\dim_K(\mathcal{L}_L(E,L)) = \dim_L(\mathcal{L}_L(E,L)) \times [L : K] \text{ et } \dim_K(E) = \dim_L(E) \times [L : K].$$

On en déduit que $\dim_K(\mathcal{L}_L(E, L)) = \dim_K(\mathcal{L}_K(E, K))$. Par conséquent, pour montrer que Φ est surjective, il suffit de montrer qu'elle est injective, c'est-à-dire que l'image d'un élément non nul est non nulle. Soit $\varphi \in \mathcal{L}_L(E, L)$, $\varphi \neq 0$. Donc $\varphi(E) = L$. Or, t est non nulle donc $t(L) = K$. D'où $t \circ \varphi(E) = K$ et $t \circ \varphi \neq 0$. □

À l'aide de ce lemme, nous pouvons à présent nous ramener au cas déjà étudié où $K = L$. Soit ψ une forme K-linéaire non nulle sur E. Alors il existe $\varphi \in \mathcal{L}_L(E, L)$, nécessairement non nulle, telle que $\psi = t \circ \varphi$. Par hypothèse, $\varphi(F) = L$ et donc $\psi(F) = t(L) = K$. Nous avons donc montré que le sous-espace vectoriel F du K-espace vectoriel E vérifie : pour toute forme K-linéaire non nulle ψ sur E, $\psi(F) = K$. D'après le premier cas, on en déduit que $F = E$.