Sandrine CARUSO

Développement asymptotique de la série harmonique

Référence : Francinou - Gianella - Nicolas, exos X-ENS, analyse 1

Théorème. *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Alors H_n admet le développement asymptotique suivant :*

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

où γ est une constante strictement positive appelée constante d'Euler.

Étape 1. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_n = H_n - \ln n$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$ ($v_n = H_{n-1} - \ln n$ si $n > 1$). Montrons que ces deux suites sont adjacentes, et que leur limite commune γ est strictement positive.

La suite $(u_n - v_n)$ tend vers 0 car $u_n - v_n = \frac{1}{n}$.

La suite (u_n) est décroissante. En effet,

$$u_n - u_{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \ln n + \ln(n+1) = -\frac{1}{n+1} - \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant 0$$

car pour tout $x > -1$, $x \geqslant \ln x$.

La suite (v_n) est croissante pour la même raison. En effet,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0.$$

Par conséquent, (u_n) et (v_n) sont adjacentes. De plus, leur limite γ est strictement positive puisque $v_2 = 1 - \ln 2 > 0$.

Cette étape montre que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Étape 2. Étudions la suite $w_n = u_n - \gamma$. Pour en trouver un équivalent, on va d'abord trouver un équivalent de $(w_n - w_{n-1})$ puis utiliser un théorème de sommation des équivalents. On a

$$w_n - w_{n-1} = u_n - u_{n-1} = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2n^2}.$$

La série de terme général $w_n - w_{n-1}$ est donc convergente, et le théorème de sommation des équivalents affirme alors que les restes sont équivalents :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (w_n - w_{n-1}) = -w_n \sim -\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{2k^2}.$$

Pour évaluer un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, nous allons utiliser un théorème de comparaison série-intégrale. Mais, dans la suite, nous aurons également besoin d'un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$; nous allons par conséquent démontrer le lemme plus général suivant :

Lemme. *Pour $\alpha > 1$, on a*

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Démonstration. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante et intégrable sur $[1, +\infty[$. Le théorème de comparaison série-intégrale donne alors

$$\int_{n+1}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{n}^{\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

On a $\int_n^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^\alpha}$. Ainsi, l'égalité précédente s'écrit

$$\frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{(n+1)^\alpha} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Les termes de gauche et de droite sont tous les deux équivalents à $\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^\alpha}$, et par encadrement, c'est également le cas du terme du milieu. □

En appliquant le lemme à $\alpha = 2$, on en déduit que $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$, et par suite,

$$w_n \sim \frac{1}{2n}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Étape 3. Posons $x_n = w_n - \frac{1}{2n}$, et utilisons la même méthode qu'à l'étape 2. On a

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} \\ &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \\ &= -\frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{6n^3}. \end{aligned}$$

On en déduit que la série de terme général $x_n - x_{n-1}$ converge, et par théorème de sommation des équivalents,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} (x_n - x_{n-1}) = -x_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{6k^3}$$

ce qui est équivalent à $\frac{1}{12n^2}$ en utilisant à nouveau le lemme. On trouve donc finalement le développement asymptotique annoncé

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On pourrait continuer le même processus et trouver ainsi, de proche en proche, les termes suivants du développement.