Sandrine CARUSO

Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$.

Références : Rudin, Faraut (Calcul intégral)
Pommellet pour le théorème de la page 2

En développement, faire soit Plancherel tout seul, soit le théorème et le reste en application (en admettant Plancherel, ou en donnant juste les étapes).

On rappelle la définition de la transformée de Fourier pour $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt.$$

Le but de ce développement est de construire une transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R})$, qui aura de meilleures propriétés que celle de L^1. La norme $\|\cdot\|_2$ et le produit de convolution $*$ sont définis par rapport à la mesure $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda$ où λ est la mesure de Lebesgue.

Lemme 1. *Pour la norme $\|\cdot\|_2$, $L^1 \cap L^2$ est dense dans L^2.*

Démonstration. Si $f \in L^2$, alors $f_n = f \cdot \mathbb{1}_{[-n,n]} \in L^1 \cap L^2$ et $\|f_n - f\|_2 \to 0$. □

Proposition 2 (Plancherel)**.** *Si $f \in L^1 \cap L^2$, alors $\hat{f} \in L^2$ et $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.*

Démonstration. Notons $\mu = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lambda$. On pose $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$, et $g = \tilde{f} * f$. Alors

$$g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(-x) f(x)\, d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} f(x)\, d\mu(x) = \|f\|_2^2,$$

et on calcule également $\hat{\tilde{f}} = \bar{\hat{f}}$ et $\hat{g} = \hat{f} \cdot \hat{\tilde{f}} = |\hat{f}|^2$. Comme f et $\tilde{f}$ sont dans L^1, g est également intégrable, et comme f et $\tilde{f}$ sont dans L^2, g est continue et tend vers 0 en l'infini (en particulier, g est bornée). Considérons $\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1+x^2}$ et $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$. On pose également $\Phi_n(t) = e^{-\frac{|t|}{n}}$. On a alors $\varphi_n = \hat{\Phi}_n$.

Montrons que $\lim_n (\varphi_n * g)(0) = g(0)$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme g est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que si $|x| \leqslant \eta$, $|g(x) - g(0)| \leqslant \varepsilon$. On a

$$\begin{aligned}
&(\varphi_n * g)(0) - g(0) \\
&\qquad = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(-x) g(x)\, d\mu(x) - g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)(g(x) - g(0))\, d\mu(x) \\
&\qquad = \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(x)(g(x) - g(0))\, d\mu(x) + \int_{|x|>\eta} \varphi_n(x)(g(x) - g(0))\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

D'une part,

$$\int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(x)|g(x) - g(0)|\, d\mu(x) \leqslant \varepsilon \int_{-\eta}^{\eta} \varphi_n(x)\, d\mu(x) \leqslant \varepsilon,$$

d'autre part,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|x|>\eta} \varphi_n(x)|g(x) - g(0)|\, d\mu(x) \leqslant 2\|g\|_\infty \lim_{n\to\infty} \int_{|x|>n\eta} \varphi(x)\, d\mu(x) = 0.$$

Donc pour n assez grand, $|(\varphi_n * g)(0) - g(0)| \leqslant 2\varepsilon$, et on en déduit que $\lim_n (\varphi_n * g)(0) = g(0)$.

Montrons maintenant que

$$(\varphi_n * g)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x)\hat{g}(x)\, d\mu(x).$$

En utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}(\varphi_n * g)(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Phi}_n(x) g(x)\, d\mu(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(t) e^{-ixt} g(x)\, d\mu(t)\, d\mu(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} g(x)\, d\mu(x)\, d\mu(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(t)\hat{g}(t)\, d\mu(t).\end{aligned}$$

Enfin, montrons que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x)\hat{g}(x)\, d\mu(x) = \|\hat{f}\|_2^2.$$

Rappelons que $\hat{g}(x) = |\hat{f}(x)|^2$. Ainsi, $\Phi_n(x)\hat{g}(x) \geqslant 0$. D'autre part, on a $\Phi_n(x) \leqslant \Phi_{n+1}(x)$ et $\lim_n \Phi_n(t) = 1$. D'après le théorème de convergence dominée, on en déduit l'égalité souhaitée.

Finalement, on a

$$\|f\|_2^2 = g(0) = \lim_n (\varphi_n * g)(0) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(x)\hat{g}(x)\, d\mu(x) = \|\hat{f}\|_2^2$$

ce qui montre également que $\hat{f} \in L^2$. $\square$

Théorème. *Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques, Y étant complet. Soit A une partie dense dans X. Si $\phi : A \to Y$ est une application uniformément continue, alors ϕ se prolonge en une unique application continue ψ de X dans Y. De plus, ψ est uniformément continue.*

Démonstration. On fixe $\varepsilon > 0$. L'uniforme continuité de ϕ assure qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in A, d(x,y) < \eta \Rightarrow \delta(\phi(x), \phi(y)) < \varepsilon.$$

Soit $x \in X$. Comme A est dense dans X, il existe une suite $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ qui converge vers x. En particulier, elle est de Cauchy, et donc

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geqslant N, d(x_n, x_p) < \eta.$$

On en déduit que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n, p \geqslant N, \delta(\phi(x_n), \phi(x_p)) < \varepsilon$$

et que la suite $(\phi(x_n))$ est de Cauchy. Comme Y est complet, elle converge.

Montrons que sa limite ne dépend pas du choix de la suite (x_n) convergeant vers x. Soit (y_n) une autre suite de A qui tend vers x. On définit alors (u_n) par $u_{2n} = x_n$ et $u_{2n+2} = y_n$. La suite (u_n) est elle aussi une suite de A qui tend vers x, et d'après ce qui précède, $(\phi(u_n))$ converge. Sa limite est donc commune à celles de $(\phi(x_n))$ et de $(\phi(y_n))$, ce qui assure que ces deux suites ont la même limite.

On définit alors $\psi(x) = \lim_n \phi(x_n)$. Par construction, ψ est continue. De plus, si une autre application ξ continue prolonge ϕ, elle vérifie également $\xi(x) = \lim_n \phi(x_n)$, et donc $\psi = \xi$.

Établissons à présent l'uniforme continuité de ψ. Soient $x, y \in X$ tels que $d(x,y) < \eta$, et soient (x_n) et (y_n) des suites de A convergeant respectivement vers x et y. Par continuité de la distance d, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $d(x_n, y_n) < \eta$. Ceci entraîne que $\delta(\phi(x_n), \phi(y_n)) < \varepsilon$, et par passage à la limite, que

$$\delta(\psi(x), \psi(y)) \leqslant \varepsilon.$$

On a bien montré que ψ est uniformément continue. $\square$

On applique le théorème précédent à $X = Y = L^2$ et $A = L^1 \cap L^2$. La proposition 2 assure que la transformée de Fourier de $L^1 \cap L^2$ dans L^2 est uniformément continue (car linéaire). On en déduit qu'elle se prolonge de manière unique à L^2 tout entier.

Remarque. Le prolongement est une isométrie et un isomorphisme de L^2 dans L^2.